CAPÍTULO 6

ENGRANAJES

6.1. INTRODUCCIÓN

La aplicación con Catia v5 al diseño de engranajes de ejes paralelos, exige la compresión de estos mecanismos. En este capítulo se hará un repaso de la evolución de los engranajes a lo largo de la historia, se clasificarán y entraremos de lleno en los engranajes de ejes paralelos y cilíndricos, mostrando su geometría y sus parámetros más importantes.

En un último apartado se hace una breve descripción de los esfuerzos más importantes que soporta un engranaje cilíndrico.

Todo este apartado corresponde al conocimiento sobre los engranajes que almacenaremos más adelante en la aplicación con Catia v5.

6.2. DEFINICIÓN

Se denomina engranaje al mecanismo utilizado para transmitir potencia mecánica entre las distintas partes de una máquina. Los engranajes están formados por dos ruedas dentadas, de las cuales a la mayor se le denomina corona y a la menor piñón. Un engranaje sirve para transmitir movimiento circular mediante contacto de ruedas dentadas. Una de las aplicaciones más importantes de los engranajes es la transmisión del movimiento desde el eje de una fuente de energía, como puede ser un motor de combustión interna o un motor eléctrico, hasta otro eje situado a cierta distancia y que ha de realizar un trabajo. De manera que una de las ruedas está conectada por la fuente de energía y es conocido como engranaje motor y la otra está conectada al eje que debe recibir el movimiento del eje motor y que se denomina engranaje conducido. Si el sistema está compuesto de más de un par de ruedas dentadas, se denomina tren de engranajes.

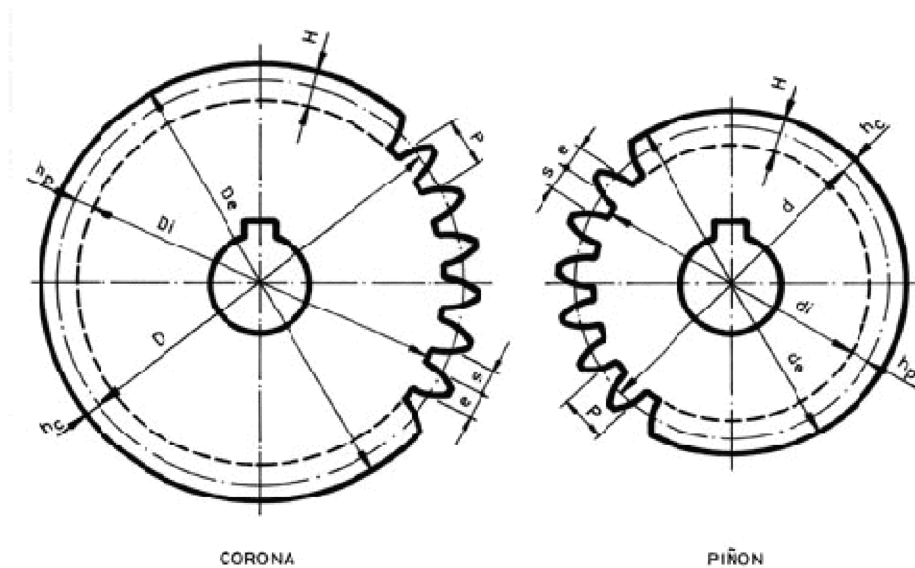


Figura 6.1. *Piñón y corona*

La principal ventaja que tienen las transmisiones por engranaje respecto de la transmisión por poleas es que no patinan como las poleas, con lo que se obtiene exactitud en la relación de transmisión.

6.3. HISTORIA

Desde épocas muy remotas se han utilizado cuerdas y elementos fabricados en madera para solucionar los problemas de transporte, impulsión, elevación y movimiento. Nadie sabe a ciencia cierta dónde ni cuándo se inventaron los engranajes. La literatura de la antigua China, Grecia, Turquía y Damasco mencionan engranajes pero no aportan muchos detalles de los mismos.



Figura 6.2. *Mecanismo de Anticitera*

El mecanismo de engranajes más antiguo de cuyos restos disponemos es el mecanismo de Anticitera. Se trata de una calculadora astronómica datada entre el 150 y el 100 a.C. y compuesta por al menos 30 engranajes de bronce con dientes triangulares. Presenta características tecnológicas avanzadas como por ejemplo trenes de engranajes epicicloidales que, hasta el descubrimiento de este mecanismo se creían inventados en el siglo XIX. Por citas de Cicerón se sabe que el de Anticitera no fue un ejemplo aislado sino que existieron al menos otros dos mecanismos similares en esa época, construidos por Arquímedes y por Posidonio. Por otro lado, a Arquímedes se le suele considerar uno de los inventores de los engranajes porque diseñó un tornillo sin fin.

En China también se han conservado ejemplos muy antiguos de máquinas con engranajes. Un ejemplo es el llamado "carro que apunta hacia el Sur" (120-250 dC), un ingenioso mecanismo que mantenía el brazo de una figura humana apuntando siempre hacia el Sur gracias al uso de engranajes diferenciales epicicloidales. Algo anteriores, de en torno a 50 d.C., son los engranajes helicoidales tallados en madera y hallados en una tumba real en la ciudad china de Shensi.



***Figura 6.3.** Transmisión antigua*

No está claro cómo se transmitió la tecnología de los engranajes en los siglos siguientes. Es posible que el conocimiento de la época del mecanismo de Anticitera sobreviviese y, con el florecimiento de la cultura del Islam los siglos XI-XIII y sus trabajos en astronomía, fuera la base que permitió que volvieran a fabricarse calculadoras astronómicas. En los inicios del Renacimiento esta tecnología se utilizó en Europa para el desarrollo de sofisticados relojes, en la mayoría de los casos destinados a edificios públicos como catedrales.

Leonardo da Vinci, muerto en Francia en 1519, dejó numerosos dibujos y esquemas de algunos de los mecanismos utilizados hoy diariamente, incluido varios tipos de engranajes por ejemplo de tipo helicoidal.

Los primeros datos que existen sobre la transmisión de rotación con velocidad angular uniforme por medio de engranajes, corresponden al año 1674, cuando el famoso astrónomo danés Olaf Roemer (1644-1710) propuso la forma o perfil del diente en epicicloide.

Robert Willis (1800-1875), que fue considerado uno de los primeros Ingenieros Mecánicos cuando era profesor de Cambridge, fue el que obtuvo la primera aplicación práctica de la epicicloide al emplearla en la construcción de una serie de engranajes intercambiables. De la misma manera, de los primeros matemáticos fue la idea del empleo de la evolvente de círculo en el perfil del diente, pero también se deben a Willis las realizaciones prácticas. A Willis se le debe la creación del odontógrafo, aparato que sirve para el trazado simplificado del perfil del diente de evolvente.



Figura 6.4. *Engranaje helicoidal de Leonardo*

Es muy posible que fuera el francés Phillipe de Lahire el primero en concebir el diente de perfil en evolvente en 1695, muy poco tiempo después de que Roemer concibiera el epicicloidal. La primera aplicación práctica del diente en evolvente fue debida al suizo Leonhard Euler (1707).

En 1856, Christian Schiele descubrió el sistema de fresado de engranajes rectos por medio de la fresa-madre, pero el procedimiento no se lleva a la práctica hasta 1887, a base de la patente Grant. En 1874, el norteamericano William Gleason inventa la primera fresadora de engranajes cónicos y gracias a la acción de sus hijos especialmente su hija Kate Gleason (1865-1933) ha convertido a su empresa Gleason Works radicada en Rochester N. Y. en una de los fabricantes de máquinas herramientas más importantes del mundo.

En 1897, el inventor alemán Robert Hermann Pfauter (1885-1914), inventa y patenta una máquina universal de dentar engranajes rectos y helicoidales por fresa-madre. A raíz de este invento y otras muchos inventos y aplicaciones que realizó sobre el mecanizado de engranajes fundó la empresa Pfauter Company que, con el paso del tiempo se ha convertido en una multinacional fabricante de todo tipo de maquinas-herramientas.

En 1906 el ingeniero y empresario alemán Friedrich Wilhelm Lorenz (1842-1924) se especializó en crear maquinaria y equipos de mecanizado de engranajes y en 1906 fabricó una talladora de engranajes capaz de mecanizar los dientes de una rueda de 6 m de diámetro, módulo 100 y una longitud del dentado de 1,5 m.

A finales del siglo XIX coincidiendo con la época dorada del desarrollo de los engranajes, el inventor y fundador de la empresa Fellows Gear Shaper Company, Edwin R. Fellows (1846-1945) inventó un método revolucionario para mecanizar tornillos sinfín glóbicos tales como los que se montaban en las cajas de dirección de los vehículos antes que fuesen hidráulicas.

En 1905, M. Chambon, de Lyon, fue el creador de la máquina para el dentado de engranajes cónicos por procedimiento de fresa madre. Por esas fechas aproximadamente André Citroën fue el inventor de los engranajes helicoidales dobles.

6.4. CLASIFICACION DE ENGRANAJES

La principal clasificación de los engranajes se efectúa según la disposición de sus ejes de rotación y según los tipos de dentado. Según estos criterios existen los siguientes tipos de engranajes:

6.4.1. Engranajes de ejes paralelos:

Se fabrican a partir de un disco cilíndrico cortado de una plancha o de un trozo de barra maciza redonda. Este disco se lleva al proceso de fresado, en donde se retira material para formar los dientes. La fabricación de estos engranajes es más simple, por lo tanto reduce sus costos.

6.4.1.1. Cilíndricos de dientes rectos

Los engranajes cilíndricos rectos son el tipo de engranaje más simple y corriente que existe. Se utilizan generalmente para velocidades pequeñas y medias; a grandes velocidades, si no son rectificados, o ha sido corregido su tallado, producen ruido cuyo nivel depende de la velocidad de giro que tengan.

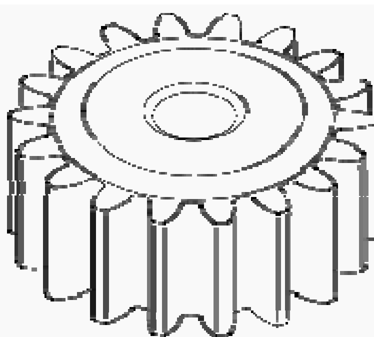


Figura 6.5. *Piñón Recto*

6.4.1.2. Cilíndricos de dientes helicoidales

Los engranajes cilíndricos de dentado helicoidal están caracterizados por su dentado oblicuo con relación al eje de rotación. En estos engranajes el movimiento se transmite de modo igual que en los cilíndricos de dentado recto, pero con mayores ventajas. Los ejes de los engranajes helicoidales pueden ser paralelos o cruzarse, generalmente a 90º. Para eliminar el empuje axial el dentado puede hacerse doble helicoidal.

Los engranajes helicoidales tienen la ventaja que transmiten más potencia que los rectos, y también pueden transmitir más velocidad, son más silenciosos y más duraderos; además, pueden transmitir el movimiento de ejes que se corten. De sus inconvenientes se puede decir que se desgastan más que los rectos, son más caros de fabricar y necesitan generalmente más engrase que los rectos.

Lo más característico de un engranaje cilíndrico helicoidal es la hélice que forma, siendo considerada la hélice como el avance de una vuelta completa del diámetro primitivo del engranaje. De esta hélice deriva el ángulo β que forma el dentado con el eje axial. Este ángulo tiene que ser igual para las dos ruedas que engranan pero de orientación contraria, o sea: uno a derechas y el otro a izquierda. Su valor se establece a priori de acuerdo con la velocidad que tenga la transmisión, los datos orientativos de este ángulo son los siguientes:

Velocidad lenta: β = 5º - 10º
Velocidad normal: β = 15º - 25º
Velocidad elevada: β = 30º - 45º

Las relaciones de transmisión que se aconsejan son más o menos parecidas a las de los engranajes rectos.



Figura 6.6. *Engranaje helicoidal*

6.4.1.3. Dobles helicoidales

Este tipo de engranajes fueron inventados por el fabricante de automóviles francés André Citroën, y el objetivo que consiguen es eliminar el empuje axial que tienen los engranajes helicoidales simples. Los dientes de los dos engranajes forman una especie de V.



Figura 6.7. *Vehículo Citroën con el logotipo de rodadura de engranajes helicoidales dobles*

Los engranajes dobles son una combinación de hélice derecha e izquierda. El empuje axial que absorben los apoyos o cojinetes de los engranajes helicoidales es una desventaja de ellos y ésta se elimina por la reacción del empuje igual y opuesto de una rama simétrica de un engrane helicoidal doble.

Un engrane de doble hélice sufre únicamente la mitad del error de deslizamiento que el de una sola hélice o del engranaje recto. Toda discusión relacionada a los engranes helicoidales sencillos (de ejes paralelos) es aplicable a los engranajes helicoidales dobles, exceptuando que el ángulo de la hélice es generalmente mayor para los helicoidales dobles, puesto que no hay empuje axial.

Con el método inicial de fabricación, los engranajes dobles, conocidos como engranajes de espina, tenían un canal central para separar los dientes opuestos, lo que facilitaba su mecanizado. El desarrollo de las máquinas talladoras mortajadoras por generación, tipo Sykes, hace posible tener dientes continuos, sin el hueco central. Como curiosidad, la empresa Citroën ha adaptado en su logotipo la huella que produce la rodadura de los engranajes helicoidales dobles.

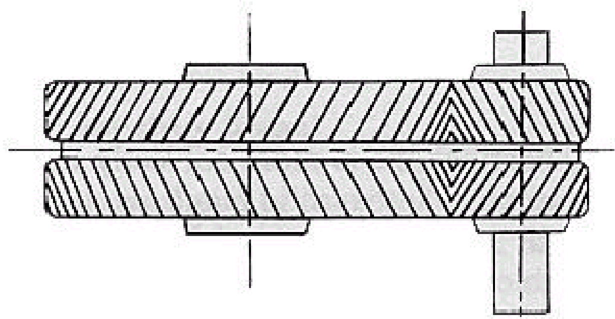


Figura 6.8. *Engranajes dobles helicoidales*

6.4.2. Engranajes de ejes perpendiculares

Se fabrican a partir de un tronco de cono, formándose los dientes por fresado de su superficie exterior. Estos dientes pueden ser rectos, helicoidales o curvos. Esta familia de engranajes soluciona la transmisión entre ejes que se cortan y que se cruzan. Los datos de cálculos de estos engranajes están en prontuarios específicos de mecanizado.

6.4.2.1. Cónicos de dientes rectos

Efectúan la transmisión de movimiento de ejes que se cortan en un mismo plano, generalmente en ángulo recto, por medio de superficies cónicas dentadas. Los dientes convergen en el punto de intersección de los ejes. Son utilizados para efectuar reducción de velocidad con ejes en 90°. Estos engranajes generan más ruido que los engranajes cónicos helicoidales. Se utilizan en transmisiones antiguas y lentas. En la actualidad se usan muy poco.



Figura 6.9. *Engranaje cónico recto*

6.4.2.2. Cónicos de dientes helicoidales

Se utilizan para reducir la velocidad en un eje de 90°. La diferencia con el cónico recto es que posee una mayor superficie de contacto. Es de un funcionamiento relativamente silencioso. Además pueden transmitir el movimiento de ejes que se corten. Los datos constructivos de estos engranajes se encuentran en prontuarios técnicos de mecanizado. Se mecanizan en fresadoras especiales.

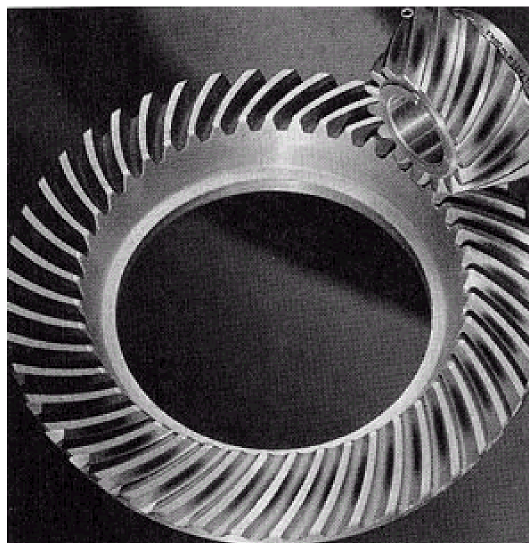


Figura 6.10. *Engranaje cónico helicoidal*

6.4.2.3. Cónicos hipoides

Parecidos a los cónicos helicoidales, se diferencian en que el piñón de ataque esta descentrado con respecto al eje de la corona. Esto permite que los engranajes sean más resistentes. Este efecto ayuda a reducir el ruido del funcionamiento.

Se utilizan en maquinas industriales y embarcaciones, donde es necesario que los ejes no estén al mismo nivel por cuestiones de espacio.

Este tipo de engranajes necesita un tipo de aceite de extrema presión para su lubricación.

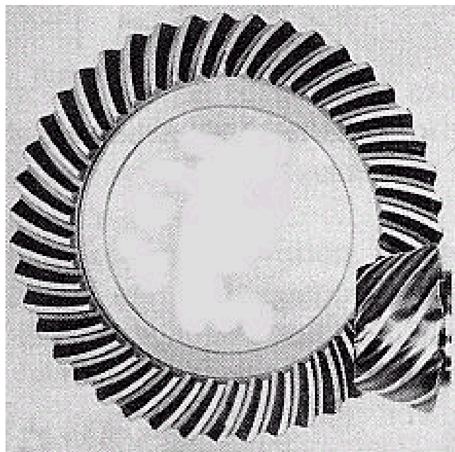


Figura 6.11. *Engranaje cónico hipoide*

6.4.2.4. De rueda y tornillo sinfín

Es un mecanismo diseñado para transmitir grandes esfuerzos, y como reductores de velocidad aumentando la potencia de transmisión. Generalmente trabajan en ejes que se cortan a 90º. Tiene la desventaja de no ser reversible el sentido de giro, sobre todo en grandes relaciones de transmisión y de consumir en rozamiento una parte importante de la potencia. En las construcciones de mayor calidad la corona está fabricada de bronce y el tornillo sin fin, de acero templado con el fin de reducir el rozamiento. Este mecanismo si transmite grandes esfuerzos es necesario que esté muy bien lubricado para matizar los desgastes por fricción.
El número de entradas de un tornillo sin fin suele ser de una a ocho. Los datos de cálculo de estos engranajes están en prontuarios de mecanizado.



Figura 6.12. *Tornillo sin fin de montacargas*

6.4.2.5. Tornillo sin fin y corona glóbicos

Con el fin de convertir el punto de contacto en una línea de contacto y así distribuir mejor la fuerza a transmitir, se suelen fabricar tornillos sin fin que engranan con una corona glóbica.

Otra forma de distribuir la fuerza a transmitir es utilizar como corona una rueda helicoidal y hacer el tornillo sin fin glóbico, de esta manera se consigue aumentar el número de dientes que están en contacto.

Finalmente también se produce otra forma de acoplamiento donde tanto el tornillo sin fin como la corona tienen forma glóbica consiguiendo mejor contacto entre las superficies.



Figura 6.13 *Tornillo sin fin y corona glóbica*

6.4.3. Aplicaciones especiales

6.4.3.1. Interiores

Los engranajes interiores o anulares son variaciones del engranaje recto en los que los dientes están tallados en la parte interior de un anillo o de una rueda con reborde, en vez de en el exterior. Los engranajes interiores suelen ser impulsados por un piñón, un engranaje pequeño con pocos dientes. Este tipo de engrane mantiene el sentido de la velocidad angular. El tallado de estos engranajes se realiza mediante talladoras mortajadoras de generación.

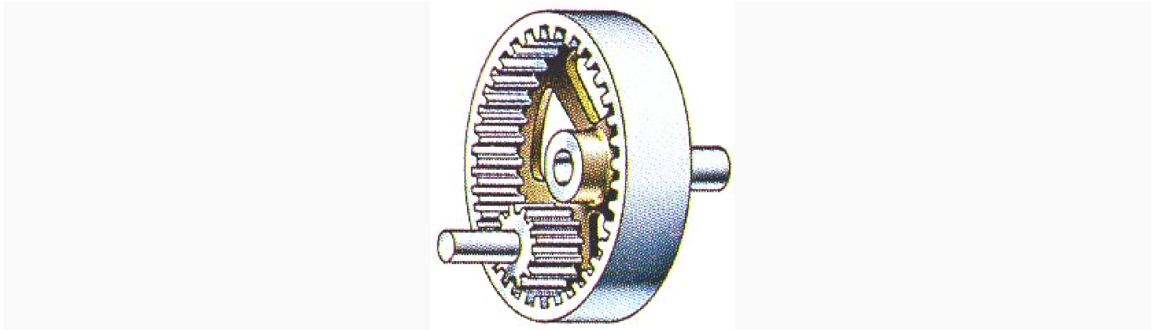


Figura 6.14. *Mecanismo de engranajes interiores*

6.4.3.2. Planetarios

Un engranaje planetario o engranaje epicicloidal es un sistema de engranajes (o tren de engranajes) consistente en uno o más engranajes externos o satélites que rotan sobre un engranaje central o planeta. Típicamente, los satélites se montan sobre un brazo móvil o portasatélites que a su vez puede rotar en relación al planeta. Los sistemas de engranajes planetarios pueden incorporar también el uso de un engranaje anular externo o corona, que engrana con los satélites.

El engranaje planetario más utilizado se encuentra dentro de la transmisión de un vehículo.



Figura 6.15. *Planetario*

6.4.3.3. De cremallera

El mecanismo de cremallera aplicado a los engranajes lo constituyen una barra con dientes la cual es considerada como un engranaje de diámetro infinito y un engranaje de diente recto de menor diámetro, y sirve para transformar un movimiento de rotación del piñón en un movimiento lineal de la cremallera. Quizás la cremallera más conocida sea la que equipan los tornos para el desplazamiento del carro longitudinal.



Figura 6.16. *Cremallera*

6.4.4. Transmisión mediante cadena o polea dentada

6.4.4.1. Mecanismo piñón cadena



Figura 6.17. *Juego de piñones de bicicleta*

Este mecanismo es un método de transmisión muy utilizado porque permite transmitir un movimiento giratorio entre dos ejes paralelos, que estén bastante separados. Es el mecanismo de transmisión que utilizan las bicicletas, motos, y en muchas máquinas e instalaciones industriales. También se emplea en sustitución de los reductores de velocidad por poleas cuando lo importante sea evitar el deslizamiento entre la rueda conductora y el mecanismo de transmisión (en este caso una cadena).

El mecanismo consta de una cadena sin fin (cerrada) cuyos eslabones engranan con ruedas dentadas (piñones) que están unidas a los ejes de los mecanismos conductor y conducido.

Las cadenas empleadas en esta transmisión suelen tener libertad de movimiento solo en una dirección y tienen que engranar de manera muy precisa con los dientes de los piñones. Las partes básicas de las cadenas son: placa lateral, rodillo y pasador. Las ruedas dentadas suelen ser una placa de acero sin cubo (aunque también las hay de materiales plásticos).

Para la relación de transmisión valen las ecuaciones de las ruedas dentadas

Este sistema aporta beneficios sustanciales respecto al sistema correa-polea, pues al emplear cadenas que engranan en los dientes de los piñones se evita el deslizamiento que se producía entre la correa y la polea. Presenta la gran ventaja de mantener la relación de transmisión constante (pues no existe deslizamiento) incluso transmitiendo grandes potencias entre los ejes (caso de motos y bicicletas), lo que se traduce en mayor eficiencia mecánica (mejor rendimiento). Además, las cadenas no necesitan estar tan tensas como las correas, lo que se traduce en menores averías en los rodamientos de los piñones.

Presenta el inconveniente de ser más costoso, más ruidoso y de funcionamiento menos flexible, al no permitir la inversión del sentido de giro ni la transmisión entre ejes cruzados; además necesita una lubricación (engrase) adecuada.

6.4.4.2. Polea dentada

Para la transmisión entre dos ejes que estén separados a una distancia donde no sea económico o técnicamente imposible montar una transmisión por engranajes se recurre a un montaje con poleas dentadas que mantienen las mismas propiedades que los engranajes es decir, que evitan el patinamiento y mantienen exactitud en la relación de transmisión.



Figura 6.18. *Transmisión por poleas dentadas*

Los datos más importantes de las poleas dentadas son:

Número de dientes
Paso
Ancho de la polea

El paso es la distancia entre los centros de las ranuras y se mide en el círculo de paso de la polea. El círculo de paso de la polea dentada coincide con la línea de paso de la banda correspondiente.

Las poleas dentadas se fabrican en diversos materiales tales como aluminio, acero y fundición.

6.5. APLICACIÓN DE LOS ENGRANAJES

Existe una gran variedad de formas y tamaños de engranajes, desde los más pequeños usados en relojería e instrumentos científicos (se alcanza el módulo 0,05) a los de grandes dimensiones, empleados, por ejemplo, en las reducciones de velocidad de las turbinas de vapor de los buques, en el accionamiento de los hornos y molinos de las fábricas de cemento, etc.

El campo de aplicación de los engranajes es prácticamente ilimitado. Los encontramos en las centrales de producción de energía eléctrica, hidroeléctrica y en los elementos de transporte terrestre: locomotoras, automotores, camiones, automóviles, transporte marítimo en buques de todas clases, aviones, en la industria siderúrgica: laminadores, transportadores, etc., minas y astilleros, fábricas de cemento, grúas, montacargas, máquinas-herramientas, maquinaria textil, de alimentación, de vestir y calzar, industria química y farmacéutica, etc., hasta los más simples movimientos de accionamiento manual.

Toda esta gran variedad de aplicaciones del engranaje puede decirse que tiene por única finalidad la transmisión de la rotación o giro de un eje a otro distinto, reduciendo o aumentando la velocidad del primero.
Incluso, algunos engranes coloridos y hechos de plástico son usados en algunos juguetes educativos.

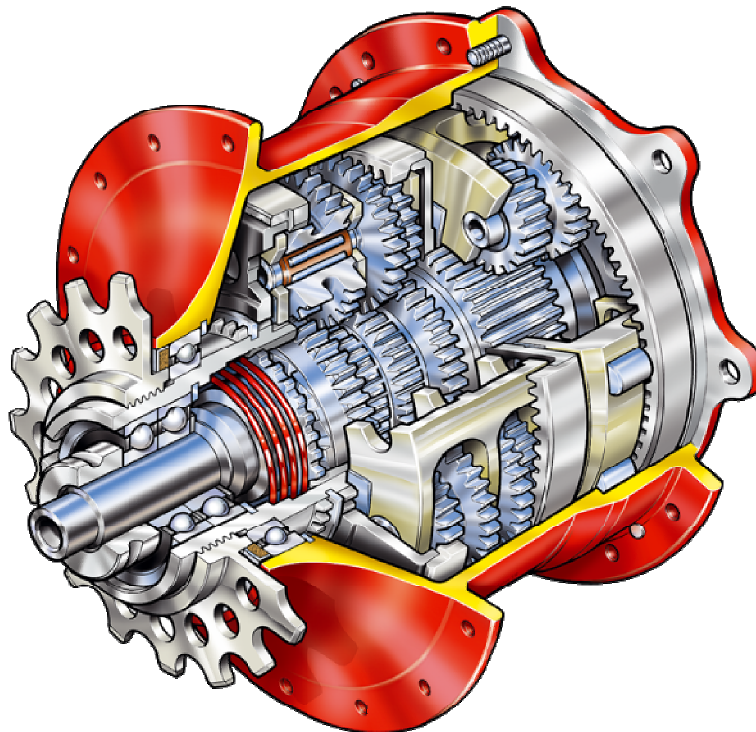


Figura 6.19. *Caja de cambios*

6.5.1. Bomba hidráulica

Una bomba hidráulica es un dispositivo tal que recibiendo energía mecánica de una fuente exterior la transforma en una energía de presión transmisible de un lugar a otro de un sistema hidráulico a través de un líquido cuyas moléculas estén sometidas precisamente a esa presión. Las bombas hidráulicas son los elementos encargados de impulsar el aceite o líquido hidráulico, transformando la energía mecánica rotatoria en energía hidráulica.

Hay un tipo de bomba hidráulica que lleva en su interior un par de engranajes de igual número de dientes que al girar provocan que se produzca el trasiego de aceites u otros líquidos. Una bomba hidráulica la equipan todas las máquinas que tengan circuitos hidráulicos y todos los motores térmicos para lubricar sus piezas móviles.

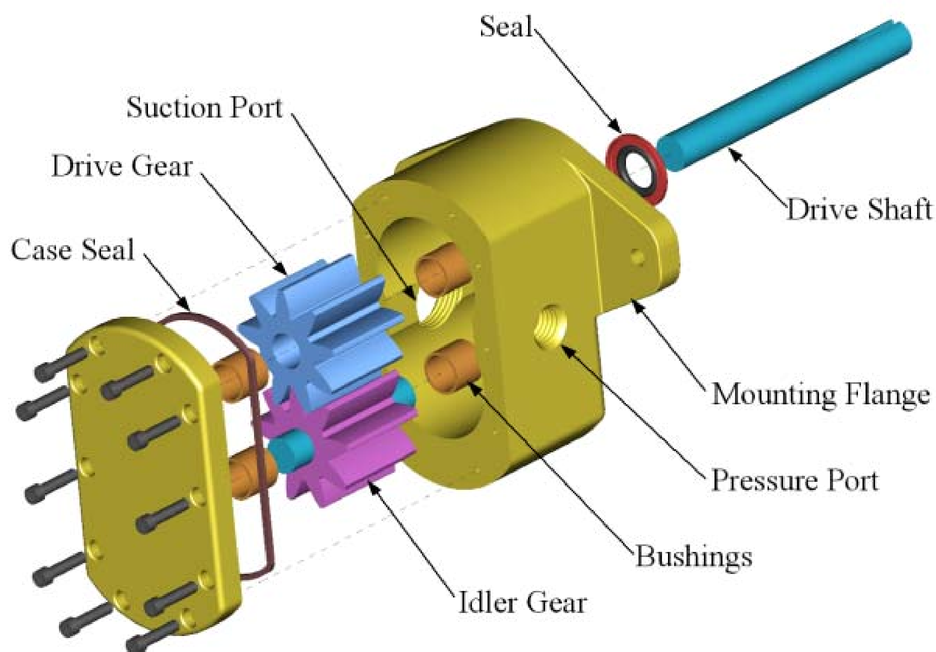


Figura 6.20. *Bomba hidráulica*

6.5.2. Mecanismo diferencial

El mecanismo diferencial tiene por objeto permitir que cuando el vehículo dé una curva sus ruedas propulsoras puedan describir sus respectivas trayectorias sin patinamiento sobre el suelo. La necesidad de este dispositivo se explica por el hecho de que al dar una curva el coche, las ruedas interiores a la misma recorren un espacio menor que las situadas en el lado exterior, puesto que las primeras describen una circunferencia de menor radio que las segundas.

El mecanismo diferencial está constituido por una serie de engranajes dispuestos de tal forma que permite a las dos ruedas motrices de los vehículos girar a velocidad distinta cuando circulan por una curva. Así si el vehículo toma una curva a la derecha, las ruedas interiores giran más despacio que las exteriores, y los satélites encuentran mayor dificultad en mover los planetarios de los semiejes de la derecha porque empiezan a rotar alrededor de su eje haciendo girar los planetarios de la izquierda a una velocidad ligeramente superior. De esta forma provocan una rotación más rápida del semieje y de la rueda motriz izquierda. El mecanismo diferencial está constituido por dos piñones cónicos llamados planetarios, unidos a extremos de los palieres de las ruedas y otros dos piñones cónicos llamados satélites montados en los extremos de sus eje porta satélites y que se engranan con los planetarios.

Una variante del diferencial convencional está constituida por el diferencial autoblocante que se instala opcionalmente en los vehículos todo-terreno para viajar sobre hielo o nieve o para tomar las curvas a gran velocidad en caso de los automóviles de competición.

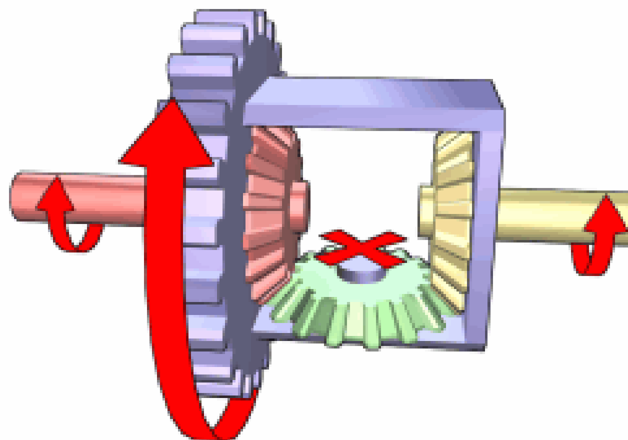


Figura 6.21. *Mecanismo diferencial*

6.5.3. Caja de velocidades

En los vehículos, la caja de cambios o caja de velocidades es el elemento encargado de acoplar el motor y el sistema de transmisión con diferentes relaciones de engranes o engranajes, de tal forma que la misma velocidad de giro del cigüeñal puede convertirse en distintas velocidades de giro en las ruedas. El resultado en la ruedas de tracción generalmente es la reducción de velocidad de giro e incremento del torque.
Los dientes de los engranajes de las cajas de cambio son helicoidales y sus bordes están redondeados para no producir ruido o rechazo cuando se cambia de velocidad. La fabricación de los dientes de los engranajes es muy cuidada para que sean de gran duración. Los ejes del cambio están soportados por rodamientos de bolas y todo el mecanismo está sumergido en aceite denso para mantenerse continuamente lubricado.



Figura 6.22. *Eje secundario de caja de cambios*

6.5.4. Reductores de velocidad

El problema básico de las máquinas es reducir la alta velocidad de los motores a una velocidad utilizable por los equipos de las máquinas. Además de reducir se deben contemplar las posiciones de los ejes de entrada y salida y la potencia mecánica a transmitir.

Para potencias bajas se utilizan moto-reductores que son equipos formados por un motor eléctrico y un conjunto reductor integrado.

Para potencias mayores se utilizan equipos reductores separados del motor. Los reductores consisten en pares de engranajes con gran diferencia de diámetros, de esta forma el engrane de menor diámetro debe dar muchas vueltas para que el de diámetro mayor de una vuelta, de esta forma se reduce la velocidad de giro. Para obtener grandes reducciones se repite este proceso colocando varios pares de engranes conectados uno a continuación del otro.

El reductor básico está formado por mecanismo de tornillo sinfín y corona. En este tipo de mecanismo el efecto del rozamiento en los flancos del diente hace que estos engranajes tengan los rendimientos más bajos de todas las transmisiones; dicho rendimiento se sitúa entre un 40 y un 90% aproximadamente, dependiendo de las características del reductor y del trabajo al que está sometido. Factores que elevan el rendimiento:

- Ángulos de avance elevados en el tornillo.
- Rozamiento bajo (buena lubricación) del equipo.
- Potencia transmitida elevada.
- Relación de transmisión baja (factor más determinante).



Figura 6.23. *Mecanismo reductor básico*

Las cajas reductoras suelen fabricarse en fundición gris dotándola de retenes para que no salga el aceite del interior de la caja.

6.6. ENGRANAJES DE EJES PARALELOS.

6.6.1. Introducción a los engranajes rectos de involuta.

Al considerar dos superficies curvas en contacto directo, se ha demostrado que la relación de las velocidades angulares es inversamente proporcional a los segmentos en que es cortada la línea de centros por la línea de acción o normal común a las dos superficies en contacto. Si la línea de acción siempre interseca la línea de centros en un punto fijo, entonces la relación de las velocidades angulares permanece constante. Esta es la condición que se desea cuando se acoplan dos dientes de engranajes: la relación de las velocidades debe ser constante. Es posible suponer la forma del diente en uno de os engranajes y, aplicando el principio anterior (la norma común interseca la línea de centros en un punto fijo), determinar el perfil del diente que se acopla. Dichos dientes se consideran dientes conjugados y las posibilidades solamente están limitadas por la habilidad personal para formar los dientes. De las muchas formas posibles solamente se han estandarizado la cicloide y la involuta. La cicloide se empleó inicialmente, aunque ahora se ha reemplazo con la involuta en todas las aplicaciones excepto en los relojes de pulso y pared. La involuta tiene varias ventajas, siendo las más importantes su facilidad de fabricación y el hecho de que la distancia entre los centros de dos engranajes de involuta puede variar sin cambiar la relación de velocidades.



Figura 6.24. *Engranajes rectos*

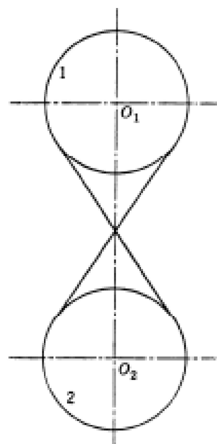


Figura 6.25. *Poleas conectadas por un cable cruzado*

Como sucede en el caso de las poleas de cable cruzado, figura 6.25, la relación de las velocidades angulares es inversamente proporcional a los diámetros de las ruedas. Si se cambia la distancia entre centros, la involuta 1, seguirá moviendo a la involuta 2, aunque ahora estarán en contacto diferentes porciones de las dos involutas. En tanto no se cambien los diámetros de las ruedas, la relación de velocidades seguirá siendo la misma.

Los círculos empleados como base para generar las involutas se conocen como círculos base y son el corazón del sistema de engranajes de involuta. En la figura 6.26, el ángulo comprendido entre una línea perpendicular a la línea de acción que pasa por el centro del circulo base y una línea desde O1 a Q (o desde O2 a Q) se conoce como ángulo de presión de la involuta y es una dimensión del punto en la involuta en donde

está ocurriendo el contacto. Si en la figura 6.26 se marca como P el punto de intersección de la línea de acción y la línea de centros, la relación de las velocidades angulares será inversamente proporcional a los segmentos en que este segmento divide la línea de centros.

Es posible dibujar círculos por el punto P usando primero O1 como centro y luego O2. La figura 6.27 muestra esta situación. El punto P se conoce como punto de paso y los círculos que pasan por este punto se conocen como círculos de paso. Se puede demostrar que cuando la involuta 1 mueve a la involuta 2, los dos círculos de paso se mueven juntos con la acción de rodamiento puro. Debido a que los segmentos en que el punto P divide a la línea de centros son ahora los radios de los círculos de paso, la relación de las velocidades angulares es inversamente proporcional a los radios de los dos círculos de paso. Si el diámetro del círculo de paso 1 es D1 y el del círculo 2 es D2 entonces:

$$\frac{w1}{w2} = \frac{D2}{D1} \qquad \textbf{(6.1)}$$

En una sección posterior se demostrará que el numero de dientes en un engrane es directamente proporcional al diámetro de paso. Por lo tanto:

$$\frac{w1}{w2} = \frac{D2}{D1} = \frac{N2}{N1} \qquad \textbf{(6.2)}$$

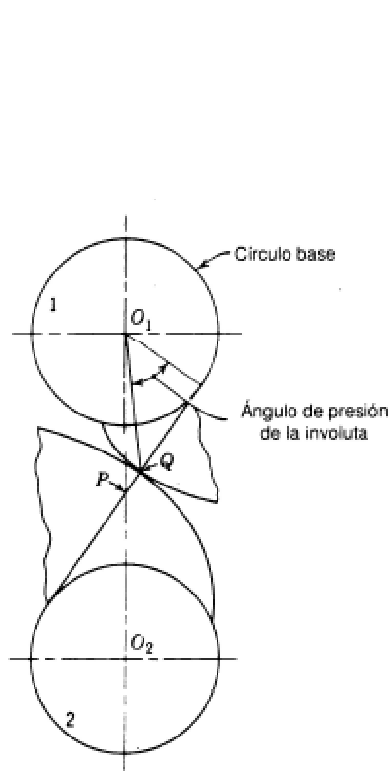


Figura 6.26. *Ángulo de presión de la involuta*

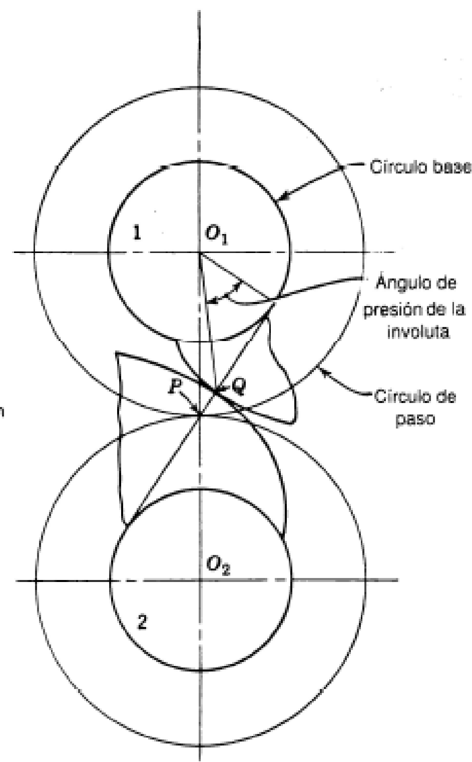


Figura 6.27. *Círculos de paso*

6.6.2. Involumetría.

Al considerar la involuta para la forma de un diente, es necesario poder calcular determinadas propiedades de la involuta.

La figura 6.28 muestra una involuta que se generó a partir de un círculo base de radio R_b. La involuta contiene dos puntos, A y B, con radios correspondientes R_A y R_B y ángulos de presión φ_A y φ_B. Es fácil establecer una relación para los factores anteriores debido a que el radio del circulo base permanece constante sin importar el punto que se esté considerando. Por lo tanto,

$$R_b = R_A \cos \varphi_A \qquad \textbf{(6.3)}$$

o

$$R_b = R_B \cos \varphi_B$$

y

$$\cos \varphi_B = \frac{RA}{RB} \cos \varphi_A \qquad \textbf{(6.4)}$$

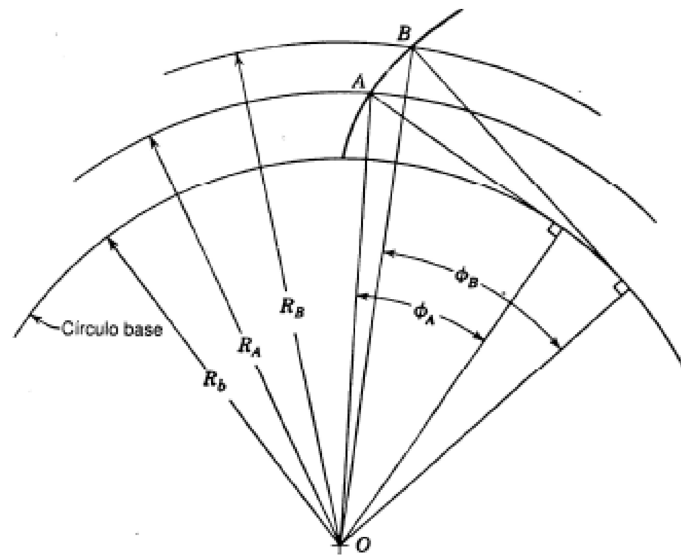


Figura 6.28. *Generación de la involuta*

A partir de la ecuación 6.4 es posible determinar el ángulo de presión de la involuta en cualquier punto de radio conocido en la involuta.

La figura 6.29 muestra la ilustración de la figura 6.28 ampliada para incluir todo el diente del engrane. A partir de esta ilustración es posible desarrollar una ecuación para encontrar el espesor del diente en cualquier punto B, dado el espesor en el punto A.

Por el principio de la generación de una involuta, el arco DG es igual a la longitud BG. Por lo tanto,

$$\llcorner DOG = \frac{arc\ DG}{OG} = \frac{BG}{OG}$$

$$\tan \varphi_B = \frac{BG}{OG}$$

Así,

$$\llcorner DOG = \frac{BG}{OG}$$

También,

$$\llcorner DOB = \llcorner DOG - \varphi_B = \tan \varphi_B - \varphi_B$$

También se puede demostrar que

∟DOA = tan φ_A – φ_A

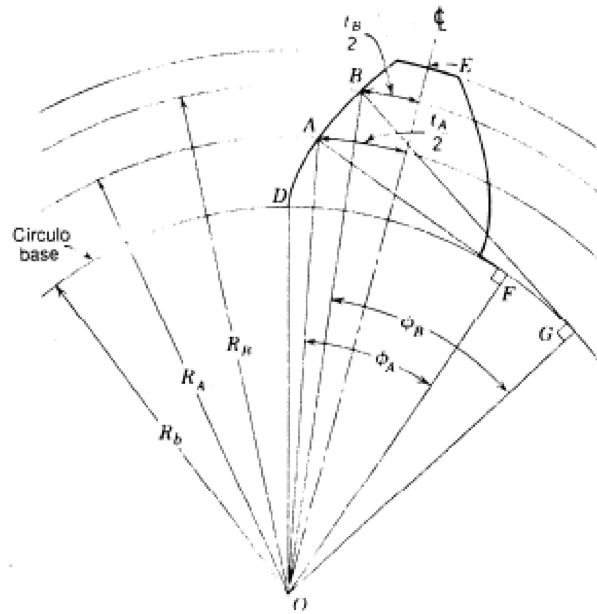


Figura 6.29. *Generación de la involuta ampliada*

La expresión tan φ – φ se denomina función de involuta y a veces se escribe como inv φ. Es fácil calcular la función involuta cuando el ángulo es conocido; φ se expresa en radianes. Sin embargo es difícil convertir de inv φ a φ, por lo que se han publicado extensas tablas de funciones de involuta.

Haciendo referencia nuevamente a la figura 6.29

$$\llcorner DOE = \llcorner DOB + \frac{½tB}{RB} = \text{inv } \varphi_B + \frac{tB}{2RB}$$

También

$$\llcorner DOE = \llcorner DOA + \frac{½tA}{RA} = \text{inv } \varphi_A + \frac{tA}{2RA}$$

De las relaciones anteriores,

$$t_B = 2R \left[\frac{½tA}{RA} + \text{inv } \varphi_A - \text{inv } \varphi_B \right] \quad \textbf{(6.5)}$$

Es posible calcular el espesor del diente por medio de la ecuación 6.5 en cualquier punto de la involuta, si se conoce es espesor en cualquier otro punto. Una aplicación interesante de esta ecuación consiste en determinar el radio en el que el diente toma forma de pico.

En este proyecto también utilizaremos la ecuación en polares de la involuta:

$$r = rb \cdot (1 + t^2) \quad \textbf{(6.6)}$$

siendo

r = el radio al centro de coordenadas del punto de la involuta en el que estemos.
t = el ángulo polar en radianes del punto de la involuta en el que estemos.
rb = radio de la circunferencia base.

Junto con su ecuación en paramétricas en un sistema de referencia cartesiano:

$$x = rb\,(\cos t + t \cdot \operatorname{sen} t)$$
$$y = rb\,(\operatorname{sen} t - t \cdot \cos t) \quad \textbf{(6.7)}$$

siendo:

x = coordenada en abscisa del punto de la involuta en el nos encontremos.
y = coordenada en ordenada del punto de la involuta en el que nos encontremos.
rb = radio de la circunferencia base.
t = parámetro, en este caso es el ángulo polar en radianes.

6.6.3. Detalles de los engranajes rectos

Para poder continuar con el estudio de los engranajes de involuta, es necesario definir los elementos básicos de un engrane como se muestra en las figuras 6.30a y figuras 6.30b. También se debe señalar que al menor de dos engranes acoplados se le llama piñón; el piñón es generalmente el engrane motriz. Si el radio de paso R de un engrane se hace infinito, entonces se obtiene una cremallera como se ve en las figuras 6.30c y 6.31. El lado del diente de una cremallera es una línea recta, que es la forma que toma una involuta cuando genera sobre un círculo base de radio infinito. De la figura 6.30a (4.8a), el paso base p_b es la distancia desde un punto en un diente al punto correspondiente en el siguiente diente medido en el circulo base. El paso circular p se define en la misma forma, excepto que se mide en el círculo de paso. El adendo a y el dedendo b son distancias radiales medidas como se muestra. La porción del flanco debajo del circulo base es aproximadamente una radial. La curva del diente es la línea de intersección de la superficie del diente y la superficie de paso.

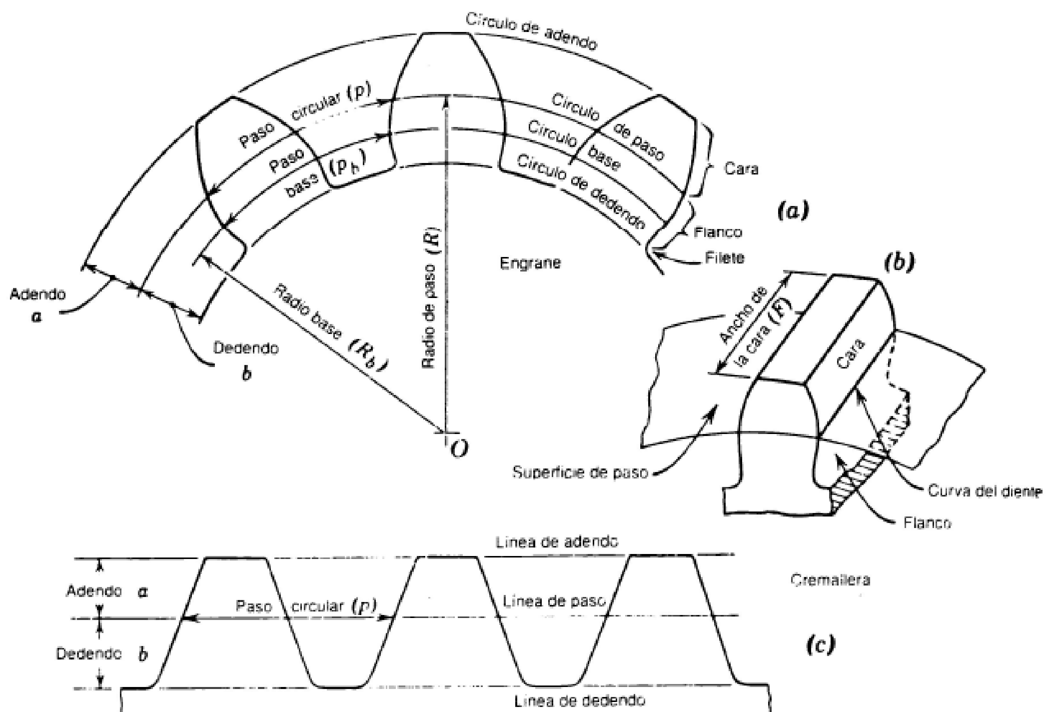


Figura 6.30. *Elementos básicos del engranaje*



Figura 6.31. *Cremallera*

Aunque es imposible mostrarlo en las ilustraciones de la figura 6.30a, el juego entre dientes es un aspecto importante en los engranajes. El juego entre dientes es la cantidad en que el ancho del espacio de un diente excede al espesor del diente que se acopla en los círculos de paso. En teoría, el juego entre engranes debería ser cero, aunque en la práctica se debe conceder determinada tolerancia para la dilatación térmica y el error en los dientes. A menos que se especifique lo contrario, en este texto se supone que el juego entre dientes es cero. En una sección posterior se proporcionará un método para calcular el juego entre engranes para un cambio en la distancia entre centros.

6.6.4. Características de la acción de la involuta.

En el estudio de la generación de la involuta se vio que la normal común a las dos superficies involutas es tangente a los dos círculos base. A esta normal común también se le llama la línea de acción. El inicio del contacto ocurre en donde la línea de acción interseca al círculo de adendo del engrane movido y el final del contacto ocurre en donde la línea de acción interseca al círculo de adendo del engrane motriz. En la figura 6.32a se puede apreciar que esto ocurre, como se muestra con el par de dientes que se aproximan al contacto y el mismo par que posteriormente abandona el contacto (señalado con líneas punteadas). El punto A es el inicio del contacto y el punto B el final del contacto. Por lo tanto, la trayectoria del punto de contacto está a lo largo de la línea APB. El punto C es donde el perfil del diente (engrane 1) corta el circulo de paso al inicio del contacto. El punto C’ es donde el perfil corta el circulo de paso al final del contacto. Los puntos D y D’ son puntos similares en el engrane 2. Los arcos CC’ y DD’ se denominan arcos de acción y deben ser iguales para que acurra la acción de rodamiento puro de los círculos de paso, como se mencionó anteriormente. Los ángulos de movimiento generalmente se descomponen en dos partes como se muestra en la figura 6.32a, en donde α es el ángulo de aproximación y β es el ángulo de receso. En general, el ángulo de aproximación no es igual al ángulo de receso. Para que ocurra una transmisión continua, el arco de acción debe ser igual o mayor que paso circular. Si esto se cumple, entonces un nuevo par de dientes entrará en acción antes de que el par anterior deje de actuar.

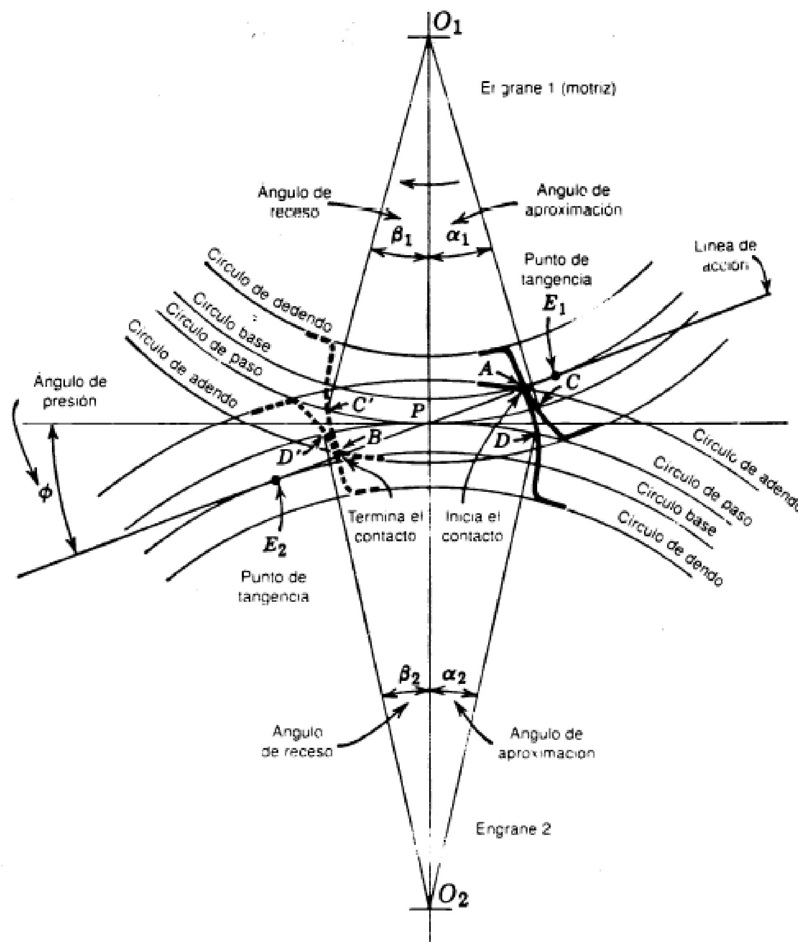


Figura 6.32a. *Acción de la involuta.*

La relación del arco de acción con respecto al paso circular se conoce como relación de contacto. La relación de contacto para los engranes de involuta también es igual a la relación de la longitud de acción (o sea, la distancia desde el inicio hasta el final del contacto medida en la línea de acción) con respecto al paso base y generalmente se calcula de esta forma, como se mostrará posteriormente. Considerada físicamente, la relación de contacto es el número promedio de dientes que están en contacto. Por ejemplo, si la relación es de 1.60, no quiere decir que hay 1.60 dientes en contacto, sino que alternadamente hay un par y dos pares de dientes en contacto y que bajo una base temporal el número promedia 1.60. Este valor, por supuesto, se debe aumentar para condiciones reales de operación. Aunque es difícil señalar valores específicos debido a las muchas condiciones involucradas. Se ha establecido 1.40 como mínimo practico, con 1.20 para casos extremos. Sin embargo, se debe notar que entre menor sea la relación de contacto, mayor será el grado de exactitud requerida para maquinar los perfiles y asegurar un funcionamiento silencioso.

La figura 6.32b también muestra un ángulo φ, formado por la línea de acción y una línea perpendicular a la línea de centros en el plano en el punto P. Este ángulo se conoce como el ángulo de presión de los dos engranes acoplados o engranados y se debe distinguir del ángulo de presión de la involuta de un punto en una involuta. Cuando los dos engranes están en contacto en el punto de paso, ángulo de presión de los dos engranes acoplados y los ángulos de presión de involuta de las dos involutas en contacto en el punto de paso serán iguales. Estos ángulos se pueden ver en la figura 6.10

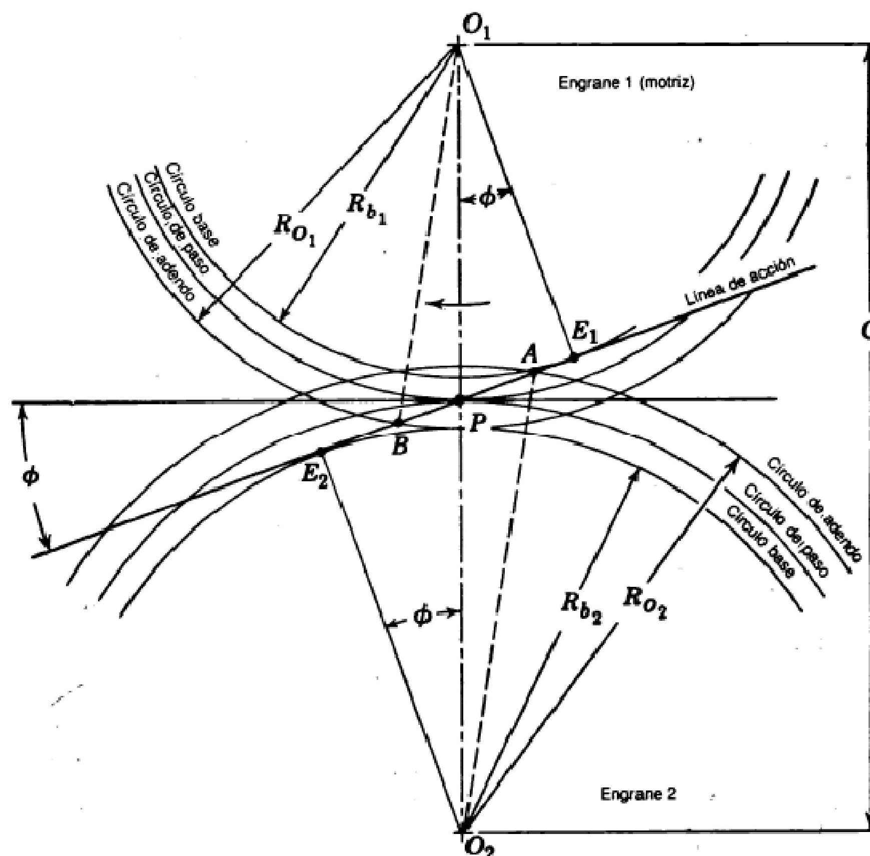


Figura 6.32b. *Ángulos de presión e involuta de dos engranajes acoplados*

A partir de la figura 6.32b se puede obtener una ecuación para la longitud de acción Z.

En donde:

A = inicio del contacto
B = final del contacto
E_1 y E_2 = puntos de tangencia de la línea de acción y los círculos base
R_0 = radio exterior
R_b = radio base
φ = ángulo de presión
C = distancia entre centros

De acuerdo con la figura,

$Z = AB = E_1B + E_2A - E_1E_2$

Por lo tanto,

$$Z = \sqrt{(Ro1)^2 - (Rb1)^2} + \sqrt{(Ro2)^2 - (Rb2)^2} - C \operatorname{sen} \varphi \quad \textbf{(6.8)}$$

El paso base p_b está dado por

$$p_b = \frac{2\pi Rb}{N} \quad \textbf{(6.9)}$$

En donde

R_b = radio base
N = número de dientes

La relación de contacto m_p es entonces

$$m_p = \frac{Z}{pb} \quad \textbf{(6.10)}$$

6.6.5. Interferencia en los engranajes de involuta

Anteriormente se mencionó que una involuta comienza en el círculo base y se genera hacia fuera. En consecuencia, es imposible tener una involuta dentro del círculo base de un par de engranajes acoplados y estos dos puntos representan los límites extremos de la longitud de acción. Se dice que estos dos puntos son puntos de interferencia. Si los dientes tienen una proporción tal que el inicio del contacto ocurre antes de que se encuentre el punto de interferencia, entonces la porción involuta del engrane movido se acopla con una porción no involuta del engrane motriz y se dice que ocurre una *interferencia de involuta*. Esta condición se muestra en la figura 6.33; E_1 y E_2 muestran los puntos de interferencia que deben limitar la longitud de acción, A muestra el inicio del contacto y B muestra el final. Se ve que el inicio del contacto ocurre antes de que se encuentre el punto de interferencia E_1; por lo tanto, hay interferencia. La punta del diente movido socava o rebaja el flanco del diente motriz como se muestra mediante la línea punteada. Hay varias formas de eliminar la interferencia, una de las cuales consiste en limitar el adendo del engrane movido de manera que pase por el punto de interferencia E_1, con lo que se da un nuevo inicio de contacto. Si se hace esto en este caso, se elimina la interferencia.

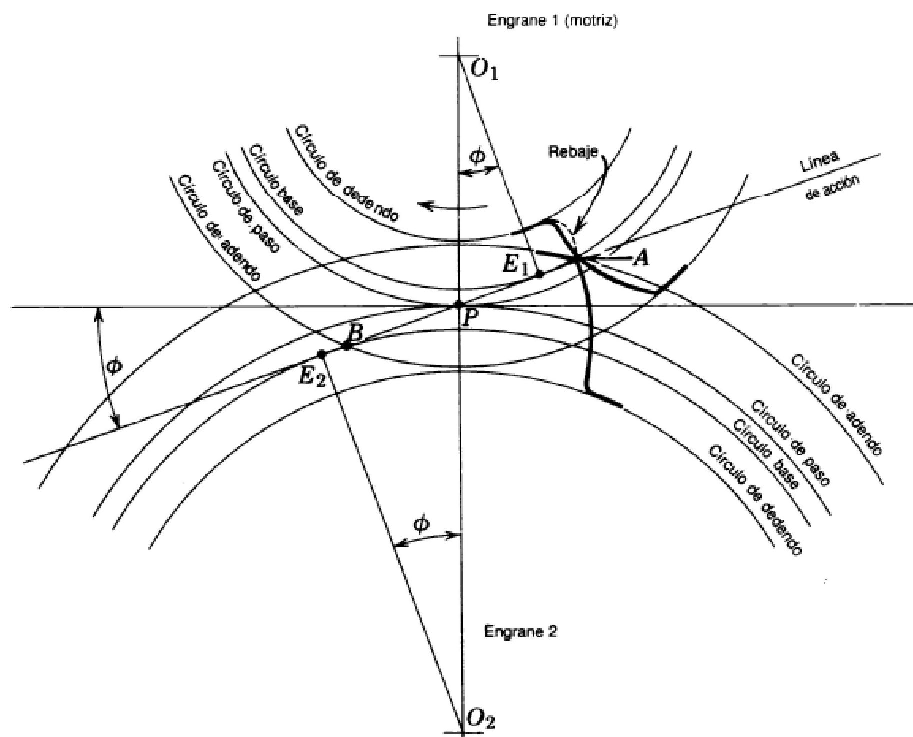


Figura 6.33. *Interferencia de involuta*

La interferencia de involuta es indeseable por varias razones. La interferencia y el rebaje resultante no solamente debilitan el diente del piñón sino que también pueden quitar una pequeña porción de la involuta adyacente al círculo base lo que puede reducir seriamente la longitud de acción.

Ahora se estudiarán las condiciones para que se presente interferencia entre una cremallera y un piñón. En la figura 6.34 aparece un piñón y una cremallera acoplados, El punto de tangencia de la línea de acción y del circulo base del piñón está señalado como el punto de interferencia E, igual que como en el caso del piñón y el engrane. En consecuencia, el punto de interferencia fija el adendo máximo para la cremallera para el ángulo de presión mostrado. Con el adendo de la cremallera mostrado en la figura 6.34, el contacto comienza en A y se presentará socavación como se muestra mediante la línea punteada. Si el adendo de la cremallera se extiende solamente a la línea que pasa por el punto de interferencia E, entonces el punto de interferencia se convierte en el inicio del contacto y se elimina la interferencia.

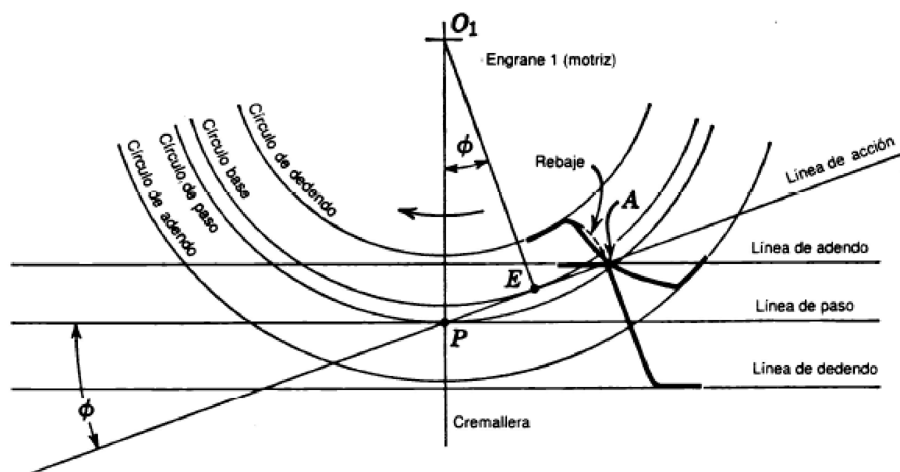


Figura 6.34. *Interferencia piñón-cremallera*

En la figura 6.34 se puede ver también que si un engranaje de radio finito con el mismo adendo que la cremallera (el adendo de la cremallera ahora pasa por el punto de interferencia) se llegara a acoplar con el piñón, el inicio del contacto ocurriría en la línea de acción en algún punto entre el punto de paso P y el punto de interferencia E. En consecuencia, no habría probabilidad de que ocurriera interferencia entre el piñón y el engrane. Por lo tanto, se puede concluir que si el numero de dientes en el piñón es tal que este se acople con una cremallera sin interferencia, entonces también se acoplará sin interferencia con cualquier otro engrane que tenga el mismo o mayor numero de dientes.

Aunque se debe evitar la interferencia de involuta y su rebaje resultante, se puede tolerar una pequeña cantidad si no reduce la relación de contacto, para un par de engranes acoplados, por debajo de un valor adecuado. Sin embargo, es difícil el problema de determinar la longitud de acción cuando ha ocurrido el rebaje y no se puede calcular a partir de la ecuación 6.8 De la figura 6.32 y la ecuación 6.8 se puede ver que si el valor de cualquier radical es mayor que C·senφ, entonces se tendrá interferencia

6.6.6. Estandarización de engranajes

Hasta el momento no se ha intentado tratar el problema de la estandarización de los engranajes rectos para facilitar el desarrollo de engranajes intercambiables. Lo que se vio anteriormente solo se aplica a los engranajes rectos en general sin considerar el aspecto de intercambiabilidad. Junto al problema de la intercambiabilidad se encuentra la forma de cómo se van a cortar los engranajes.

Existen varias formas para maquinar los engranajes rectos, la más antigua de las cuales consiste en utilizar una fresa de forma para quitar el material entre los dientes a medida que el disco para el engrane se posiciona a lo largo de una revolución completa en una fresadora. Este método produce un perfil compuesto de involuta y cicloide y encuentra aplicación principalmente en la fabricación de engranajes de repuesto que no se pueden obtener económicamente a partir de las formas convencionales. Los engranajes rectos modernos se generan para producir un perfil de involuta en los dientes. Los dos métodos más usuales para producir engranajes rectos actuales son el método de fresado y el método de formado Fellows.
Las figuras 6.35 y 6.36 muestran, respectivamente, los principios de fresado y del método de Fellows para el corte de engranajes exteriores. Para el corte de engranajes internos pequeños es necesario utilizar el método de Fellows; sin embargo, si se cuenta con espacio es posible fresar engranajes con resalto o reborde en donde el espacio en un extremo de los dientes es insuficiente para permitir la carrera de una fresa, como se muestra en la figura 6.35a.

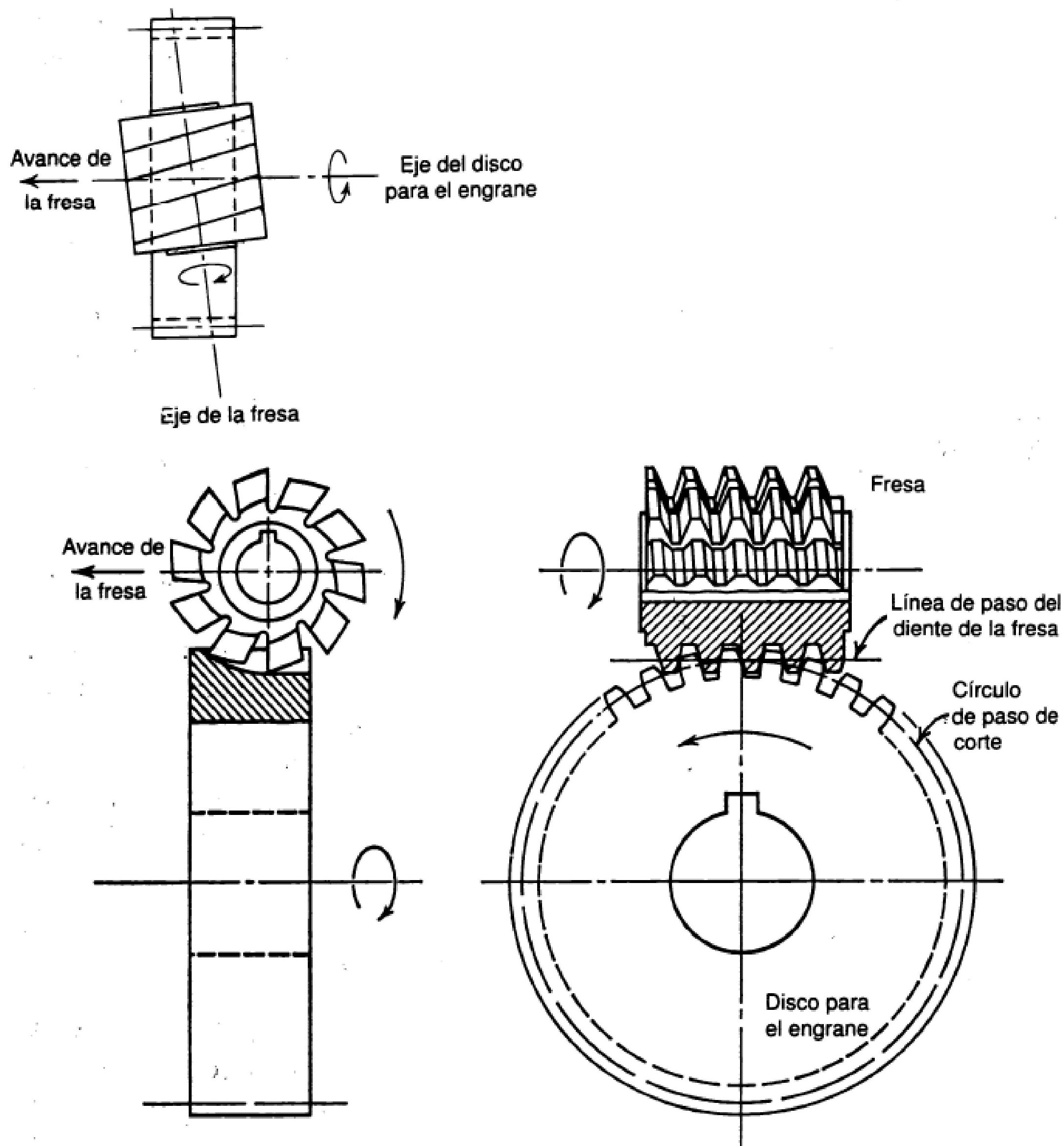


Figura 6.35a. *Generación de un engranaje recto con una fresa generatriz*

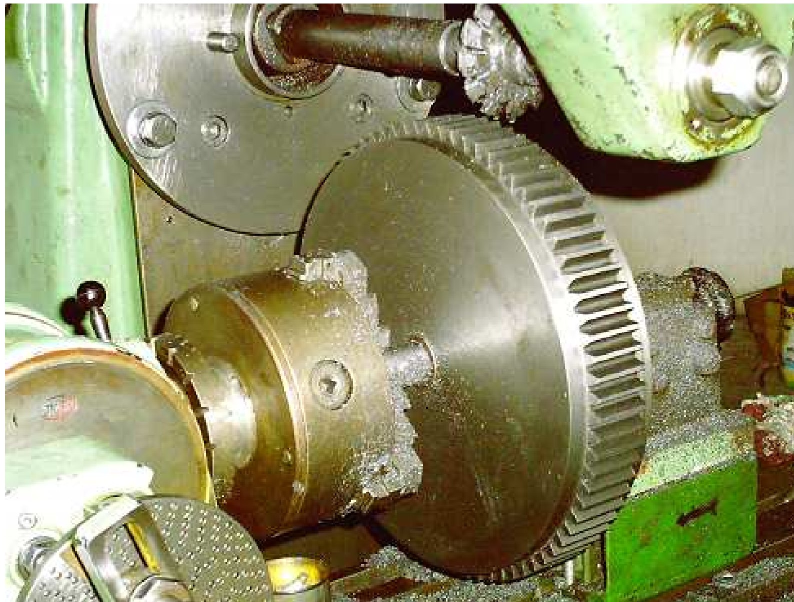


Figura 6.35b. *Fresadora de engranajes rectos.*

Al desarrollarse la tecnología de los engranajes se buscó una forma para clasificar los cortadores y los engranajes que estos producen. El método adoptado en los Estados Unidos consistió en especificar la relación del número de dientes con respecto al diámetro de paso. A esta relación se le dio el nombre de *paso diametral* y se expresa como

$$P_d = \frac{N}{D} \qquad \textbf{(6.11)}$$

en donde

N = número de dientes
D = diámetro de paso en pulgadas, pulg.

Aunque las unidades del paso diametral están en dientes por pulgadas, no se acostumbra dar las unidades cuando se especifican valores numéricos.

En Europa, el método de clasificación consiste en especificar la relación del diámetro de paso con respecto al número de dientes, y a esta relación se le denomina *módulo.* Por lo tanto, el módulo es el recíproco del paso diametral y se expresa como

$$m = \frac{D}{N} \qquad \textbf{(6.12)}$$

en donde

D = diámetro de paso en milímetros, mm
N = número de dientes
Los valores numéricos de los módulos se especifican en unidades de milímetros.

Debe notarse que el paso diametral y el módulo se definen como relaciones y no son distancias físicas que se quedan medir en un engrane. El paso circular, por el contrario, se definió anteriormente como la distancia medida a lo largo del circulo de paso desde un punto en un diente hasta el punto correspondiente en el siguiente diente, La relación entre el paso circular y el paso diametral o modulo puede expresarse como sigue:

$$p = \frac{\pi D}{N} = \frac{\pi}{Pd} \qquad \text{(FPS)} \qquad \textbf{(6.13)}$$

$$p = \frac{\pi D}{N} = \pi m \qquad \text{(SI)} \qquad \textbf{(6.14)}$$

en donde

p = paso circular
P_d = paso diametral
m = módulo

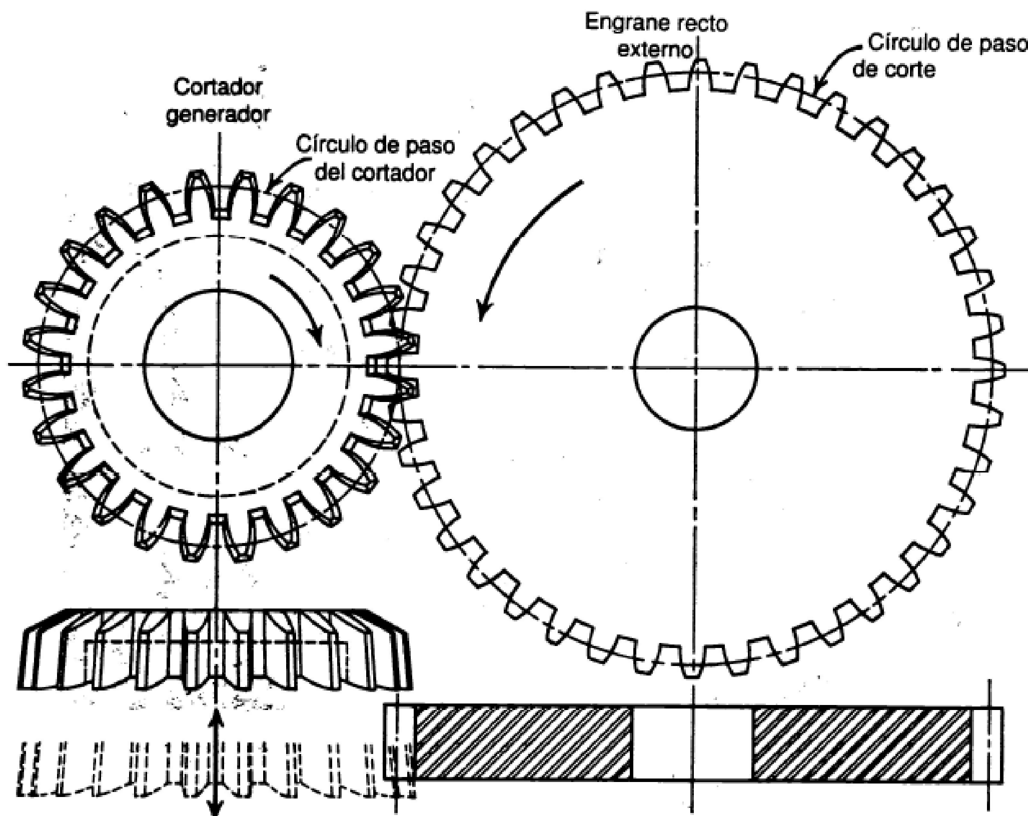


Figura 6.36a. *Método Fellows de generación de engranajes.*



Figura 6.36b. *Cortador Fellows.*

Para fines de especificar los cortadores de engranes, los valores del paso diametral y del módulo se tomaron generalmente como números. La siguiente es una lista de fresas para engranes disponibles comercialmente en pasos diametrales con ángulos de presión de 14½ º y 20º.

2, 2½, 3, 3½, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1 2, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 50, 64, 72, 80, 96, 120

Se pueden especificar pasos más finos con incrementos pares hasta llegar a 200. Los pasos que se utilizan comúnmente para los engranes de precisión en instrumentos son 48, 64, 72, 80, 96 y 120. La AGMA (Asociación Americana de Fabricantes de Engranajes) también incluye en la lista pasos diametrales de ½ y 1, aunque los fabricantes de herramientas generalmente no mantienen en existencia fresas con estos tamaños. La siguiente es una lista de fresas estándar en módulos métricos (ángulo de presión 20º).

1, 1.25, 1.50, 1.75, 2, 2.25, 2.50, 2.75, 3, 5, 6, 8, 10, 12, 16, 20

Cuando los cortadores se estandarizaron, se adoptó un ángulo de presión de 14½. Esto se dio como consecuencia del proceso de fundido de engranes que empleaba un ángulo de 14½ debido a que el seno 14½º se aproxima a ¼. Posteriormente, también se adoptó un ángulo de 20º. Tanto 14½ como 20º se han utilizado durante muchos años, pero la tendencia en años recientes ha sido hacia el empleo de 20º en preferencia sobre el ángulo de 14½. En una sección posterior se muestra que es posible cortar un piñón con menos dientes y sin socavación cuando se utiliza una fresa con un ángulo de presión de 20º en lugar de una de 14½. Como resultado de la tendencia hacia mayores ángulos de presión, la AGMA ha adoptado 20º y 25º para engranajes de paso grueso (1-19.99 Pd) y 20º para engranajes de paso fino (20-200 Pd). Los estándares métricos británicos y alemanes especifican un ángulo de presión de 20º. La Sociedad de Ingenieros Automotrices (SEA) en su norma aeroespacial ASI 560 para engranes métricos recomienda un ángulo de presión de 20º para propósitos generales. También se incluyen ángulos de presión de 22.5º y 25º debido a que estos ángulos de alta presión se emplean para los engranajes de la industria aeroespacial.

Las proporciones de los dientes de los engranajes rectos de involuta de la norma americana (FPS) se presentan en la tabla 6.1.

	Paso grueso (1-19.99 Pd) AGMA 201.02 Agosto 1974 20º o 25º Profundidad total	**Paso fino (20-200 Pd) AGMA 207.06 Noviembre 1977 20º Profundidad total**
Adendo (a)	1.000/Pd	1.000/Pd
Dedendo (b)	1.250/Pd	1.200/Pd+0.002 (min)
Claro c (dedendo-adendo)	0.250/Pd	0.200/Pd+0.002 (min)*
Profundidad de trabajo (hk) (doble del adendo)	2.000/Pd	2.000/Pd
Profundidad total (ht) (adendo + dedendo)	2.250/Pd	2.200/Pd+0.002 (min)
Radio de filete de la cremallera básica (rf)	0.300/Pd	No está dado
Espesor del diente (t)	1.5708/Pd	1.5708/Pd
* Para dientes recortados o rectificados, c = 0.350/Pd + 0.002 (min)		

Tabla 6.1. *Proporciones de los dientes- Engranajes rectos de involuta.*

La tabla 6.2 da las proporciones para los engranajes rectos de 14½º de profundidad total y de 20º con escote. Aunque estos engranajes raras veces se especifican en los diseños nuevos, son esenciales para los engranajes de repuesto de maquinaria más antigua.

Debido a su diseño, los cortadores de forma para engranajes se clasifican no solamente de acuerdo al paso diametral o módulo, sino también de acuerdo al diámetro de paso y al número de dientes. La tabla 6.3 muestra una lista de cortadores de forma estándar para engranajes rectos clasificados según el paso diametral, y la tabla 6.4 muestra una lista de cortadores de forma para engranajes rectos métricos. La tabla 6.5 muestra los módulos métricos de la norma británica. Las proporciones de los dientes son las siguientes:

Adendo (a) 1.000 m
Dedendo (b) 1.250 m
Ángulo de presión (φ) 20º

La tabla 6.6 muestra los módulos métricos de la norma alemana. Las proporciones de los dientes son las siguientes:

Adendo (a) 1.000 m
Dedendo (b) 1.157 m ó 1.167 m
Ángulo de presión (φ) 20º

	14º Profundidad total	20º con escote
Adendo (a)	1.000/Pd	0.800/Pd
Dedendo (b)	1.157/Pd	1.000/Pd
Claro (c)	0.157/Pd	0.200/Pd
Radio del filete (rf)	0.209/Pd	0.304/Pd
espesor del diente (t)	1.5708/Pd	1.5708/Pd

Tabla 6.2. *Proporciones de los dientes para engranajes rectos de 14½ de profundidad total y 20º escotados*

Paso diametral	Diámetro de paso, pulg				Numero de dientes			
(a) Angulo de presión de 14½º								
4	4			5	16			20
5	4				20			
6	4			5	24			30
8	4			5	32			40
10	3	4		5	30	40		50
12	3			4	36			48
16	3			4	48			64
20	3			4	60			80
24	3				72			
32	3				90			
(b) Ángulo de presión 20º								
3	4				12			
4	4	5		6	16	20		24
5	4	5		6	20	25		30
6	4	5		6	24	30		36
8	3	4	5	6	24	32	40	48
10	3	4		5	30			50
12	3	4		5	36	40		60
14	4				56	48		
16	3			4	48			64
18	4				72			
20	3			4	60			80
24	3				72			
32	3				96			

Tabla 6.3. *Cortadores de forma para engranajes rectos*

Debido a los cortadores para engranes tanto del sistema americano (FPS) como del sistema métrico se tomaron generalmente como números enteros, la conversión de los pasos diametrales a los milímetros de los módulos no produce valores de números enteros. Ver tabla 6.7.

Los símbolos métricos que se emplean para designar las proporciones de los engranes rectos varían considerablemente con respecto a los recomendados por la AGMA. La tabla 6.8 muestra la comparación entre los símbolos de la AGMA y la propuesta ISO 701 de la norma internacional.

Modulo	Paso diametral	Diámetro de paso, pulg	Número de dientes
1.0	25.400	2.992	76
1.5	16.933	2.953	50
2.0	12.700	2.992	38
2.5	10.160	2.953	30
3.0	8.466	3.071	26
3.5	7.257	3.031	22
4.0	6.350	4.094	26
4.5	5.644	3.897	22
5.0	5.080	3.937	20
6.0	4.233	4.252	18
8.0	3.175	5.039	16

Tabla 6.4. *Cortadores de forma métricos para engranajes rectos: Ángulo de presión de 20º - Profundidad total*

Módulos preferidos	Módulos secundarios
1	1.125
1.25	1.375
1.5	1.75
2	2.25
2.5	2.75
3	3.5
4	4.5
5	5.5
6	7
8	9
10	11
12	14
16	18
20	22
25	28
32	36
40	45
50	

Tabla 6.5. *Módulos métricos normales de la norma británica*

0.3	2.5	8	27
0.4	2.75	9	30
0.5	3	10	33
0.6	3.25	11	36
0.7	3.5	12	39
0.8	3.75	13	42
0.9	4	14	45
1	4.5	15	50
1.25	5	16	55
1.5	5.5	18	60
1.75	6	20	65
2	6.5	22	70
2.25	7	24	75

Tabla 6.6. *Módulos métricos de la norma alemana.*

Paso diametral	**Módulo milímetros**	**Paso diametral**	**Modulo milímetros**
0,5	50,8000	11	2,3091
0,8	33,8667	12	2,1167
1,0	25,4000	13	1,9538
1,3	20,3200	14	1,8143
1,5	16,9333	15	1,6933
1,8	14,5143	16	1,5875
2,0	12,7000	17	1,4941
2,3	11,2889	18	1,4111
2,5	10,1600	19	1,3368
2,8	9,2364	20	1,2700
3,0	8,4667	24	1,0583
3,5	7,2571	32	0,7938
4,0	6,3500	40	0,6350
5,0	5,0800	48	0,5292
6,0	4,2333	64	0,3969
7,0	3,6286	72	0,3528
8,0	3,1750	80	0,3175
9,0	2,8222	96	0,2646
10,0	2,5400	120	0,2117

Tabla 6.7. *Paso diametral y módulo métrico*

	AGMA	ISO 701
Número de dientes	N	z
Radio de paso	R	r
Diámetro de paso	D	d'
Radio exterior	R_0	r_a
Diámetro exterior	D_0	d_a
Radio base	R_b	r_b
Ancho de cara	F	b
Adendo	a	ha
Dedendo	b	hf
Paso circular	p	p
Paso base	p_b	pb
Ángulo de presión	ϕ	α
Longitud de acción	Z	g_α
Relación de contacto (transversal)	m_p	ϵ_α
Distancia entre centros	C	a
Profundidad de trabajo	h_k	-
Profundidad total	h_t	h
Espesor del diente	t	s
Claro	c	c
Juego entre dientes	B	j_t

Tabla 6.8. *Símbolos de los engranajes rectos.*

Si los engranes rectos se producen con cortadores estándar, podrán intercambiarse si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Los pasos diametrales o módulos de los cortadores utilizados para producir los engranes son iguales.
2. Los ángulos de presión de los cortadores son iguales.
3. Los engranes tienen los mismos adendos y los mismos dedendos.
4. Los espesores de los dientes de los engranajes son iguales a la mitad del paso circular.

Con frecuencia se emplea el término de engranes estándar y significa que el engrane fu cortado por uno de os cortadores estándar presentados anteriormente y que el espesor del diente es igual al espacio del diente que es igual a la mitad del paso circular. Los engranes estándar son intercambiables. Los engranes rectos que se ofrecen a la venta en los catálogos de los fabricantes de engranes son engranes estándar. Sin embargo, la mayoría de los engranes usados en la industria automotriz y en la industria

de la aviación son del tipo no estándar y presentan ciertas ventajas sobre los engranes entandar:

- Obtención de relación de velocidad exacta
- Mejorar la suavidad de operación
- Aumentar la capacidad de carga del juego de engranajes empleado
- Evitar la interferencia

Pero el estudio de engranajes no estándar no es objeto de este proyecto

6.6.7. Número mínimo de dientes para evitar la interferencia.

Anteriormente se consideró el problema de la interferencia al acoplar un piñón y su engrane y al acoplar un piñón y una cremallera. Al estudiar la figura 6.34 se encontró que si no hay interferencia entre un piñón y una cremallera, no habrá interferencia entre el piñón y un engrane del mismo tamaño o mayor que el piñón. Naturalmente, esto supone que en ambos casos se tienen las mismas proporciones de los dientes.

Cuando se considera un engrane estándar en el que las proporciones de los dientes son las dadas en las tablas, es posible calcular el número mínimo de dientes en un piñón para que se acople con una cremallera sin que haya interferencia de involuta. Para resolver este caso límite, la línea de adendo de la cremallera se pasa por el punto de interferencia del piñón.

En la figura 6.37 se muestran las características esenciales de un piñón y una cremallera para este caso. El punto de paso se designa mediante P y el punto de interferencia mediante E. Por lo tanto,

$$\text{sen } \varphi = \frac{PE}{R}$$

también

$$\text{sen } \varphi = \frac{a}{PE} = \frac{K/Pd}{PE}$$

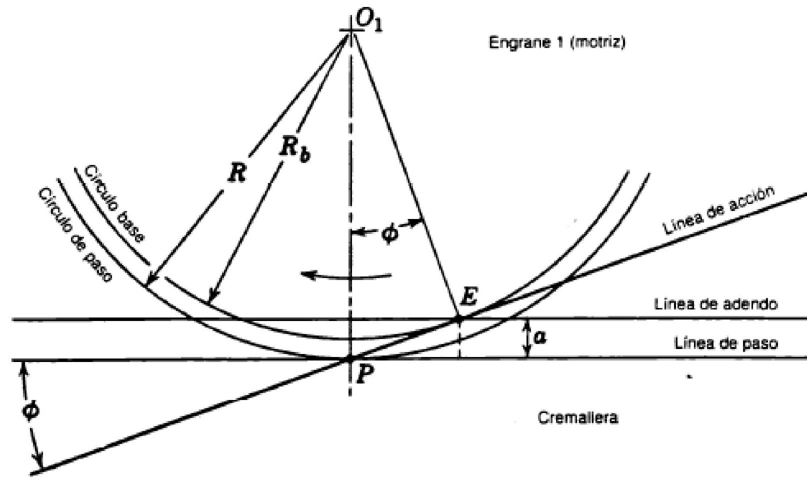


Figura 6.37. *Interferencia piñón-cremallera.*

en donde *k* es una constante que, al dividirse entre el paso diametral, da el adendo (*a= k/Pd*). Para el sistema de profundidad total, *k*= 1.00; y para el sistema con escote, *k* = 0.80. Si las dos ecuaciones para seno φ se multiplican entre sí, se obtiene

$$\text{sen}^2\,\varphi = \frac{k}{RPd}$$

Pero

$$\text{Pd} = \frac{N}{2R}$$

En donde N = número de dientes. Por lo tanto,

$$\text{sen}^2\,\varphi = \frac{2k}{N}$$

y

$$\text{N} = \frac{2k}{sen^2\,\varphi} \qquad \textbf{(6.15)}$$

A partir de esta ecuación se puede calcular el número más pequeño de dientes de un piñón para que se acople con una cremallera sin que haya interferencia, para cualquier sistema estándar de dientes. Estos valores se muestran en la tabla 6.9 para los sistemas comunes. Debido a que estos valores se calcularon para un piñón que se acopla con una cremallera, también se pueden usar como valores mínimos para que un piñón que se acopla con un engrane sin que haya interferencia.

	14½º Profundidad total	**20º Profundidad total**	**22.5º Profundidad total**	**25º Profundidad total**
N	32	18	14	12

Tabla 6.9. *Número mínimo de dientes para acoplamiento con una cremallera sin que haya socavación o rebaje.*

Debido a que la acción de los dientes de una fresa que corta a un engrane recto es similar a la de un piñón que se acopla con una cremallera, la ecuación 6.15 se puede emplear para determinar los números mínimos de dientes que se pueden cortar sin que haya socavación o rebaje. Para este caso, el valor k debe incrementarse desde 1.000 para permitir el corte del claro necesario entre los engranes que se acoplan. Esto da por resultado un valor de k = 1.157 para engranajes de 14½º y k = 1.250 para engranes 20º y 25º. Por lo tanto, el número mínimo de dientes que se pueden fresar es de 37 para un ángulo de presión de 14½º, de 21 para un ángulo de presión de 20º y de 14 para un ángulo de 25º. La figura 6.38 muestra dos diagramas generados por computadora de un engranaje recto de 10 dientes, socavación profunda, cortado con una fresa de 20º de profundidad total.

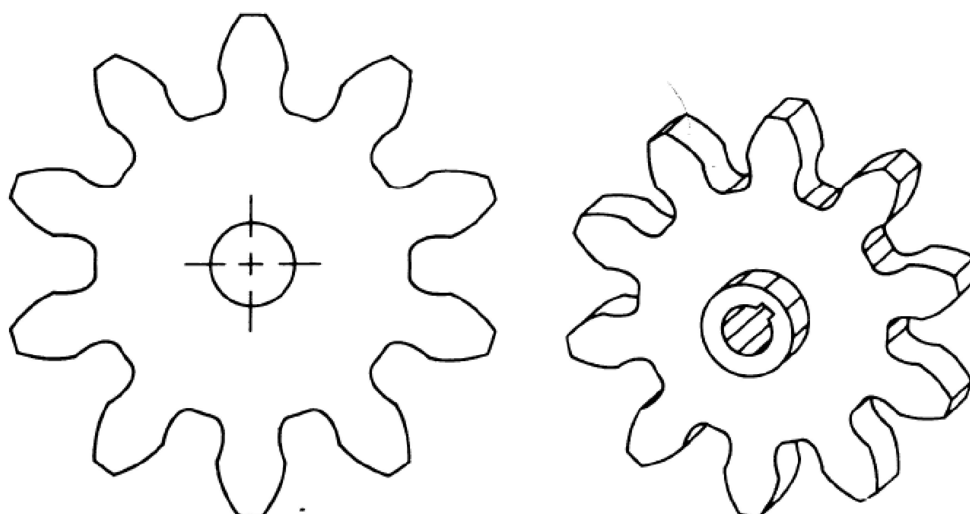


Figura 6.38. *Engranaje recto estándar con socavación, con N=10*

La determinación del número mínimo de dientes que un cortador de piñones puede generar en un engrane sin que haya socavación es más difícil que la determinación del número mínimo de dientes cuando el engrane se corta mediante una cremallera o fresa. A partir de la figura 6.39 se puede desarrollar una ecuación para determinar el número aproximado de dientes. En esta figura, el circulo de adendo del engrane 2 pasa por el punto de interferencia E del engrane 1. La siguiente relación para el radio exterior del engrane 2 puede escribirse como

$$R_{02} = \sqrt{(Rb2)^2 + C^2 sen^2\varphi}$$

Sustituyendo,

$$R_{02} = R_2 + a = \frac{N2+2k}{2Pd} \cos \varphi$$

$$R_{b2} = R_2 \cos \varphi = \frac{N2}{2Pd} \cos \varphi$$

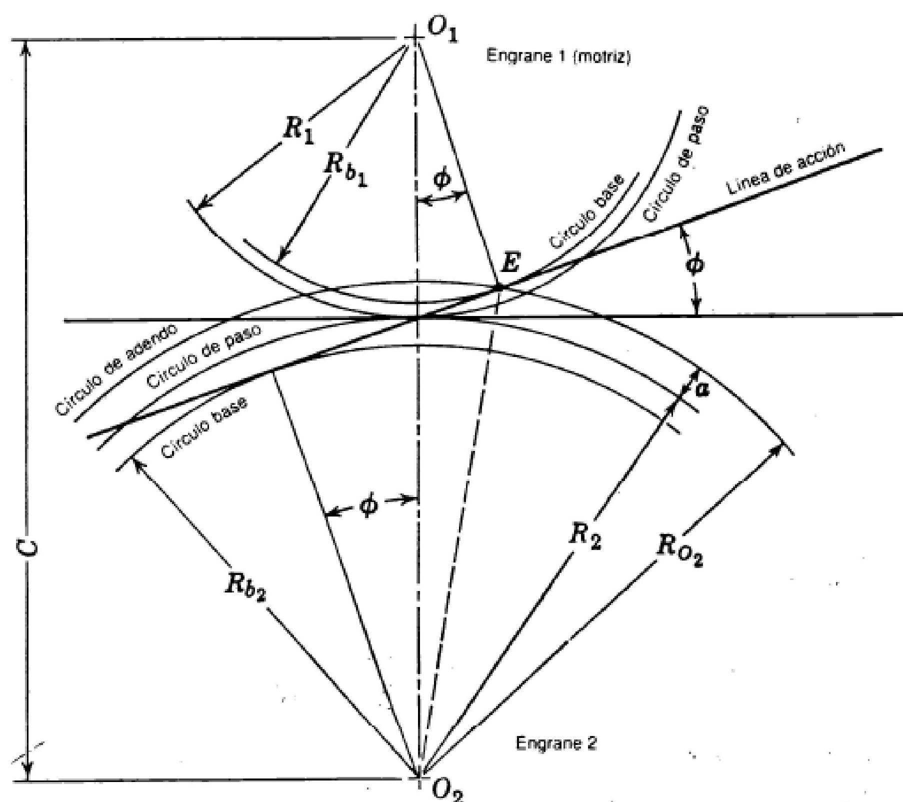


Figura 6.39. *Interferencia.*

y

$$C = R_1+R_2 = \frac{N1+N2}{2Pd}$$

Por tanto,

$$\frac{N1+N2}{2Pd} = \sqrt{(\frac{N2}{2Pd})^2 cos^2 \varphi \; + \; (\frac{N1+N2}{2Pd})^2 sen^2 \varphi}$$

y

$$(N_2 + 2k)^2 = (N_2)^2 \cos^2 \varphi + (N_1+N_2)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$$

Si se desarrolla y utiliza la relación $\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi = 1$ se obtiene la siguiente ecuación a partir de la cual se puede determinar el mayor engrane recto (N2) que se puede acoplar con un engrane dado (N1) sin que haya interferencia de involuta en el engrane 1:

$$N_2 = \frac{4k^2 - (N1)^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{2N1 sen^2 \varphi - 4k} \qquad \textbf{(6.16)}$$

6.6.8. Determinación del juego entre engranajes.

En la figura 6.40a se muestra el perfil de dos engranajes estándar que se acoplan a la distancia estándar entre centros

$$C = \frac{N1+N2}{2Pd} \qquad \text{(FPS)}$$

$$C = \frac{(N1+N2)}{2} m \qquad \text{(SI)}$$

con un juego entre engranes igual a cero. Los círculos de paso a que operan estos dos engranes son los círculos de paso a que fueron cortados y sus radios están dados por $R = N/2P_d$. Los círculos de paso de corte también se conocen como *círculos de paso estándar.* El ángulo de presión φ a que operarán estos engranes es el ángulo de presión a que fueron cortados; es decir, 14½º, 20º ó 25º. En otras palabras, los círculos de paso de corte de operación son idénticos al igual que los ángulos de presión de corte y de operación.

La figura 6.40b muestra el caso en el que dos engranes se han separado una distancia ΔC para dar una nueva distancia entre centros C'. La línea de acción ahora cruza la línea de centros en un nuevo punto de paso P'. Se puede observar que los círculos de paso estándar o de corte (radios R_1 y R_2) ya no son tangentes entre sí. También, el punto de paso P' divide la distancia entre centros C' en segmentos que son inversamente proporcionales a la relación de velocidades angulares. Estos segmentos se convierten en los radios R_1' y R_2' de los nuevos círculos de paso que son tangentes entre sí en el punto P'. Estos círculos se conocen como círculos de paso de operación y las ecuaciones para sus radios se pueden determinar a partir de

$$\frac{\omega 1}{\omega 2} = \frac{N2}{N1} = \frac{R2'}{R1'}$$

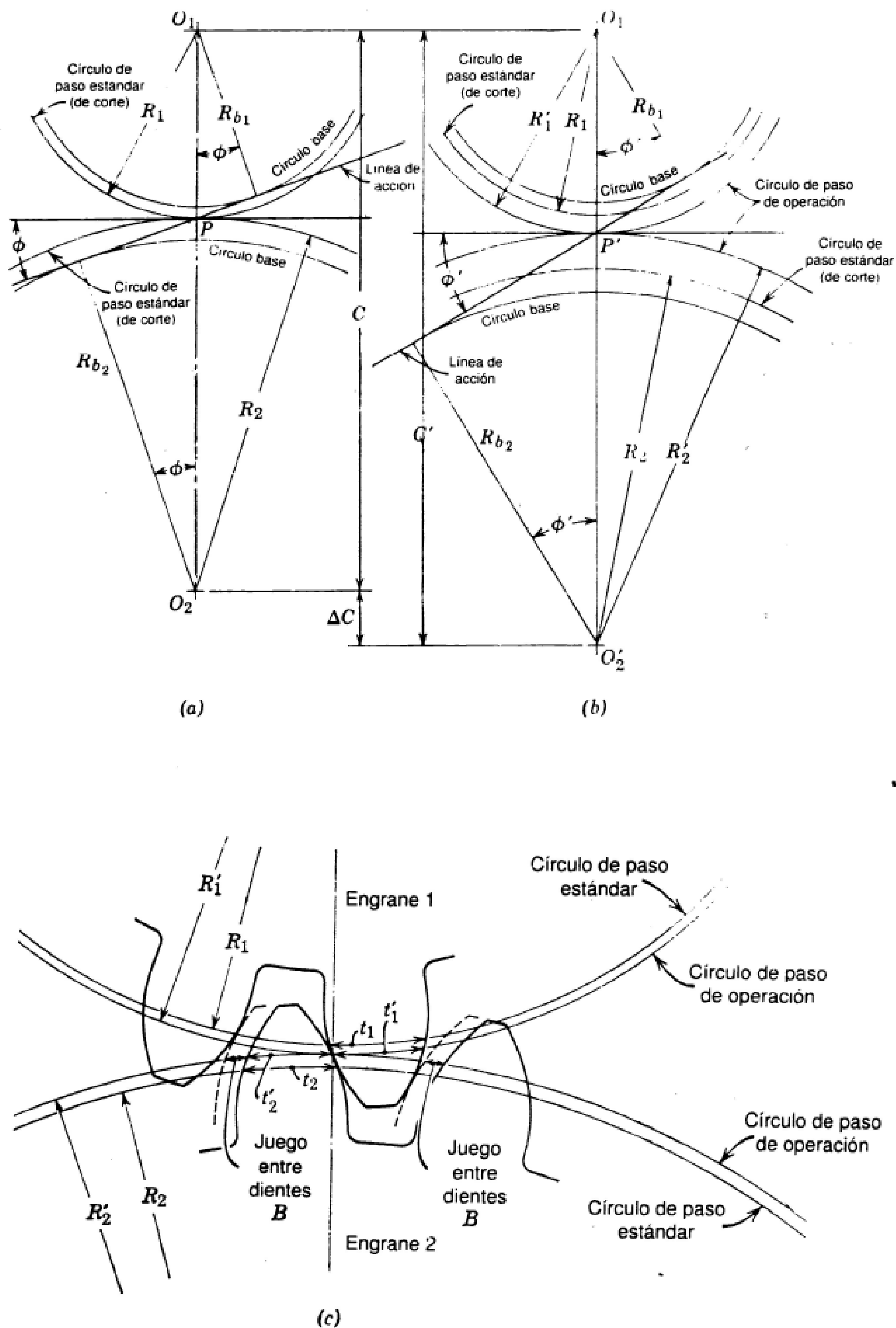


Figura 6.40. *Juego entre engranajes*

y

$$R_1' + R_2' = C'$$

Para dar

$$R_1' = \left(\frac{N1}{N1+N2}\right) C'$$

y

$$R_2' = \left(\frac{N2}{N1+N2}\right) C'$$

Además del cambio en los círculos de paso, el ángulo de presión también aumenta. El ángulo φ' se conoce como el *ángulo de presión de operación* y es mayor que el ángulo de presión de corte φ. A partir de la figura 6.40 se puede obtener fácilmente una ecuación para el ángulo de presión de operación φ' de la siguiente forma:

$$C' = \frac{Rb1+Rb2}{\cos\varphi'} = (R_1 + R_2)\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} = C\,\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}$$

o

$$\cos\varphi' = \frac{C}{C'}\cos\varphi \qquad \textbf{(6.17)}$$

También,

$$\Delta C = C' - C = C\,\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} - C = C\left[\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'} - 1\right] \qquad \textbf{(6.18)}$$

Cuando los engranes se operan bajo la condición de la figura 6.40b, se tendrá juego entre ellos como se muestra en la figura 6.40c. La relación de velocidades angulares no se verá afectada siempre y cuando los engranes permanezcan acoplados. Sin embargo, si se invierte la dirección de rotación, se tendrá movimiento perdido. Se puede obtener una ecuación para el juego entre engranes a partir del hecho de que la suma de los espesores de los dientes y el juego entre engranes debe ser igual al paso circular, estando medidos todos ellos en el circulo de paso de operación. A partir de la figura 6.40c se puede escribir la siguiente ecuación:

$$t_1' + t_2' + B = \frac{2\pi R1'}{N1} = \frac{2\pi R2'}{N2} \qquad \textbf{(6.19)}$$

en donde

t' = espesor del diente en el círculo de paso de operación
B = juego entre engranes
R' = radio del círculo de paso de operación
N = número de dientes

De la ecuación 6.5 que se desarrolló en la sección sobre involumetría,

$$t_1' = 2R_1' \left[\frac{t1}{2R1} + inv\,\varphi - inv\,\varphi'\right] = \frac{R1'}{R1} t_1 - 2R_1'(\text{inv } \varphi - \text{inv } \varphi') \qquad \textbf{(6.20)}$$

$$t_2' = 2R_2' \left[\frac{t2}{2R2} + inv\,\varphi - inv\,\varphi'\right] = \frac{R2'}{R2} t_2 - 2R_2'(\text{inv } \varphi - \text{inv } \varphi') \qquad \textbf{(6.21)}$$

en donde

t = espesor del diente en el circulo de paso estándar o de corte ($t = p/2 = \pi/2P_d$)
R = radio del circulo de paso estándar o de corte ($R = N/2P_d$)
φ = ángulo de presión de corte (14½º, 20º, 25º)
φ' = ángulo de presión de operación

También,

$$\frac{R1}{R1'} = \frac{R2}{R2'} = \frac{C}{C'} \qquad \textbf{(6.22)}$$

y

$$C' = R1' + R2' \qquad \textbf{(6.23)}$$

Sustituyendo las ecuaciones 6.20, 6.21, 6.22 y 6.23 en la ecuación 6.19 y recordando que

$$\frac{2\pi R}{N} = p = \frac{\pi}{Pd}$$

$$B = \frac{C'}{C}\left[\frac{\pi}{Pd} - (t1 + t2) + 2C\,(inv\,\varphi - inv\,\varphi)\right] \quad \text{(FPS)} \qquad \textbf{(6.24)}$$

$$B = \frac{C'}{C}\left[\pi m - (t1 + t2) + 2C\,(inv\,\varphi - inv\,\varphi)\right] \quad \text{(SI)}$$

Para los engranajes estándar,

$$t_1 = t_2 = \frac{p}{2} = \frac{\pi}{2Pd} \quad \text{(FPS)}$$

$$t_1 = t_2 = \frac{p}{2} = \frac{\pi m}{2} \quad \text{(SI)}$$

y la ecuación 6.24 se reduce a

$$B = 2C' (\text{inv } \varphi - \text{inv } \varphi') \qquad \textbf{(6.25)}$$

La ecuación 6.51 debe utilizarse si los engranes no son estándar, es decir, si t1 ≠ t. En el manual de engranes AGMA *Gear Handbook*, Volumen 1, 390.03, se pueden encontrar los valores recomendados para el juego entre engranes

6.6.9. Engranajes cicloidales

Aunque los engranajes cicloidales han sido reemplazados en gran medida por los de involuta, el perfil cicloidal tiene ciertas ventajas que vale la pena señalar. Estas se estudian brevemente a continuación.

Los engranajes cicloidales no presentan interferencia, además de que un diente cicloidal generalmente es más fuerte que uno de involuta debido a que tiene flancos extendidos en comparación con los flancos radiales de un diente de involuta. Adicionalmente, los dientes cicloidales tienen menos deslizamiento y, en consecuencia, menos desgaste. La figura 6.41 muestra el diente de un engrane cicloidal y uno de involuta para su comparación. Sin embargo, una desventaja importante de los engranajes cicloidales es el hecho de que para un par de engranes cicloidales solamente hay una distancia entre centros teóricamente correcta para la que transmiten movimiento a una relación constante de velocidades angulares. Otra desventaja es que aunque es posible fresar un engrane cicloidal, la fresa no se fabrica tan fácilmente como en el caso de una fresa de involuta debido a que los dientes cicloidales de cremallera no tienen lados rectos como los dientes de involuta de cremallera. Debido a esta razón es posible producir los engranes de involuta con mayor exactitud y economía que los engranajes cicloidales.

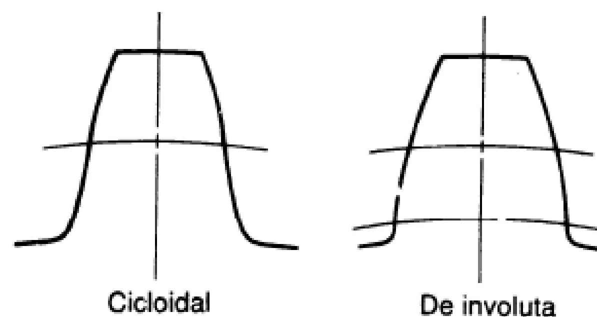


Figura 6.41. *Diente cicloidal y de involuta.*

Los engranes de involuta han reemplazado completamente a los engranes cicloidales para la transmisión de potencia. No obstante, los engranes de cicloidales se usan ampliamente en los relojes de pulso y de pared y en determinados instrumentos en los casos en que el problema de interferencia y resistencia es de interés primordial.

6.6.10. Teoría de los engranajes helicoidales

Si se hace girar un plano en un cilindro base, una línea en el plano paralelo al eje del cilindro generará la superficie del diente de un engrane recto de involuta. Sin embargo, si la línea generatriz se inclina hacia el eje, entonces se generará la superficie del diente de un engranaje helicoidal. Estas dos situaciones se muestran en las figuras 6.42a y 6.42b, respectivamente.

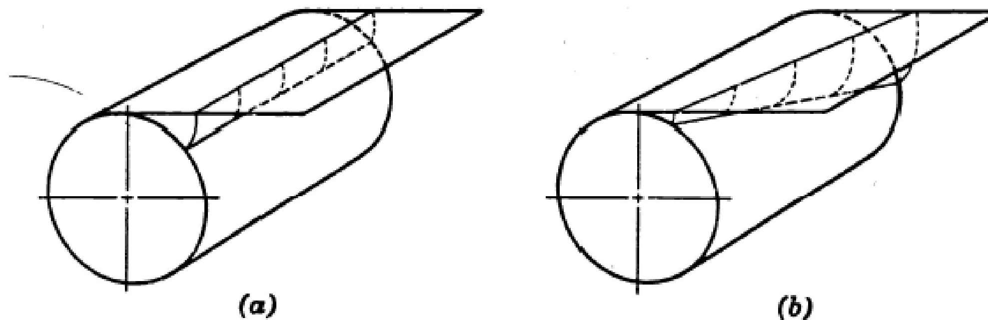


Figura 6.42. *Generatrices en engranajes rectos y helicoidales*

Los engranajes helicoidales se emplean para conectar flechas paralelas y flechas paralelas no paralelas que no se intersecan. El primer caso corresponde a *engranes helicoidales paralelos* y el segundo a *engranes helicoidales cruzados*. Ver la figura 6.43.



Figura 6.43. *Engranajes helicoidales de ejes paralelos y de ejes cruzados.*

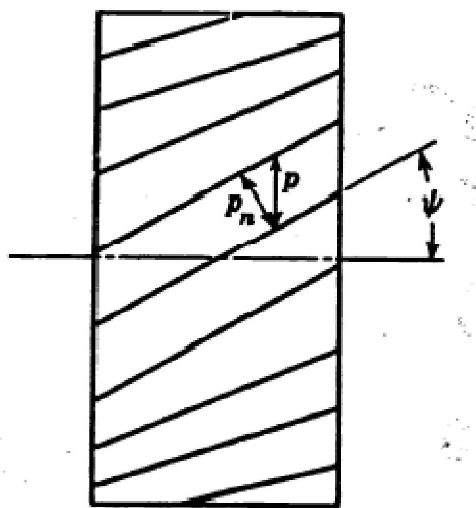


Figura 6.44. *Paso circular normal (p_n) y paso circular en el plano de rotación (p)*

Al determinar las proporciones de los dientes de un engrane helicoidal, ya sea para flechas cruzadas o paralelas, es necesario considerar la manera en que los dientes se van a cortar. Si el engrane se va a fresar, todas las dimensiones se calculan en un plano normal al elemento de paso del diente, y el paso diametral y el ángulo de presión son valores estándares en dicho plano. Debido a que la acción de corte de una fresa ocurre en el plano normal, es posible utilizar la misma fresa para cortar tanto engranajes helicoidales como engranajes rectos de un paso dado; en un engranaje recto el plano normal y el plano de rotación son idénticos. La figura 6.44 muestra un dibujo de un engrane helicoidal con el paso circular medido en el plano normal y en el plano de rotación. De acuerdo a la ilustración.

$$p_n = p \cos \psi = \frac{\pi \cos \psi}{Pd} \qquad \text{(FPS)} \qquad \textbf{(6.26)}$$

$$p_n = \pi m \cos \psi \qquad \text{(SI)}$$

en donde P_d = paso diametral en el plano de rotación (también conocido como *paso diametral transversal*). La figura 6.45 muestra el fresado de engranes helicoidales.

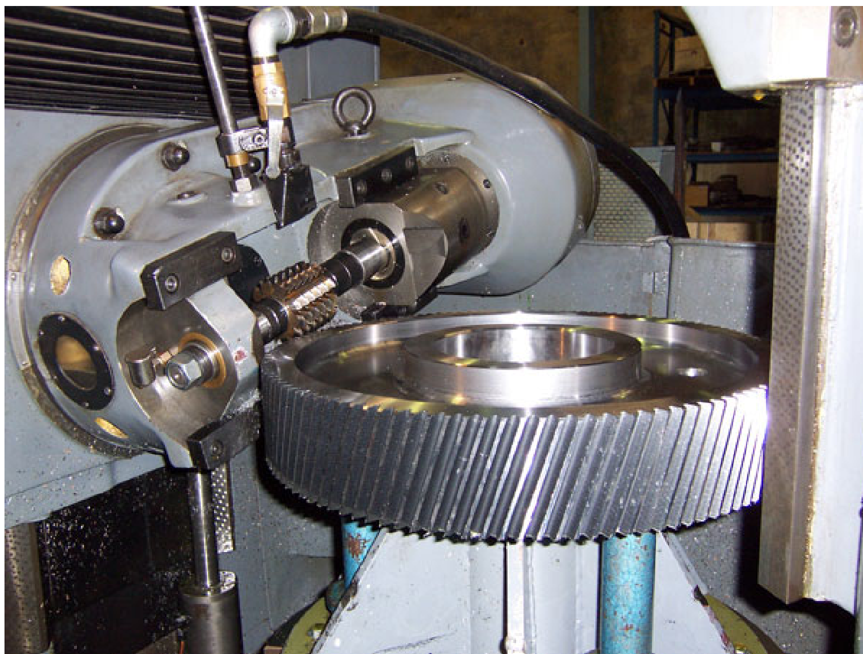


Figura 6.45. *Fresado de un engranaje helicoidal*

Cuando un engrane helicoidal se corta con un fresa, el paso circular normal p_n de la figura 6.44 se vuelve igual al paso circular de la fresa. De esto y el hecho de que p = π/P_d se puede escribir la siguiente relación:

$$p_n = \frac{\pi}{Pnd} \qquad \text{(FPS)}$$

$$p_n = \pi m_n \qquad \text{(SI)}$$

En donde P_{nd} es el paso diametral normal y es igual al paso diametral de la fresa, y m_n es el modulo normal. Sustituyendo el valor de pn en la ecuación 6.27,

$$P_d = P_{nd} \cos \psi \qquad \text{(FPS)} \qquad \textbf{(6.27)}$$

$$m = \frac{mn}{\cos \psi} \qquad \text{(SI)}$$

Sustituyendo también Pd = N/D en la ecuación 6.27,

$$D = \frac{N}{Pnd \cos \psi} \qquad \text{(FPS)} \qquad \textbf{(6.28)}$$

$$D = \frac{Nmn}{\cos \psi} \qquad \text{(SI)}$$

Las fuerzas que actúan en un engranaje helicoidal, es necesario considerarlas al determinar la relación entre el ángulo de presión φ y el ángulo de presión normal φ_n y el ángulo de hélice ψ. De la figura 6.46, que muestra estas fuerzas,

$$\tan \varphi = \frac{Fs}{Ft} \quad \text{(plano OABH)}$$

$$\tan \varphi_n = \frac{Fs}{OD} \quad \text{(plano ODC)}$$

$$OD = \frac{Ft}{\cos \psi} \quad \text{(plano OADG)}$$

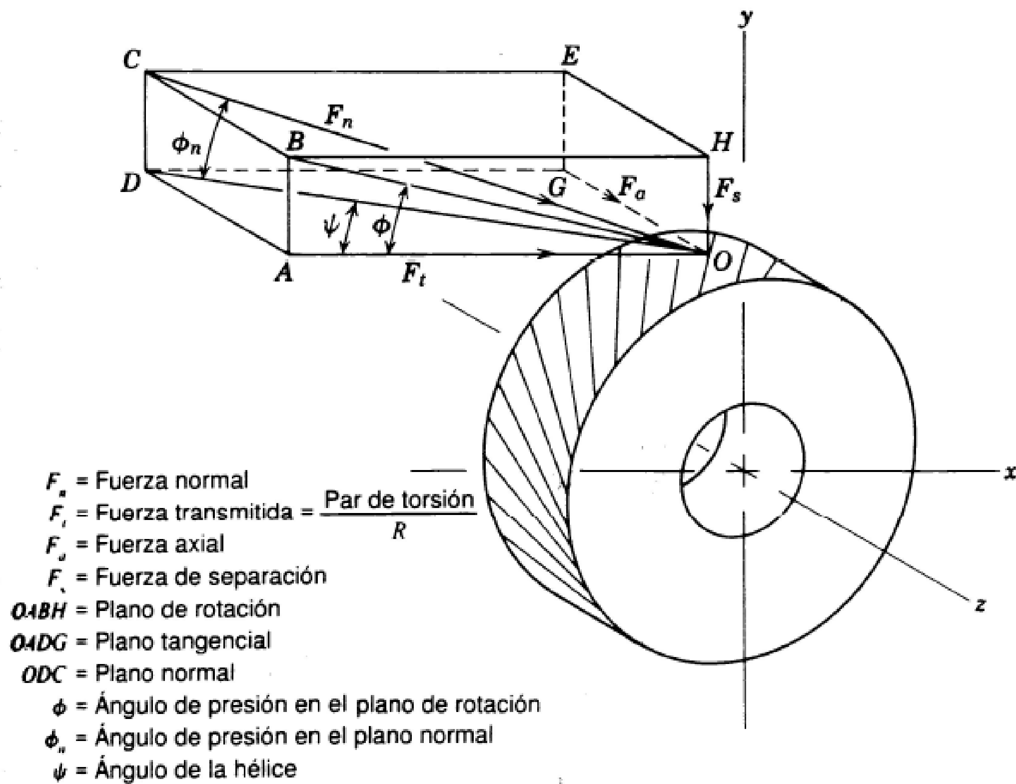


***Figura 6.46.** Diagrama de fuerzas en un engranaje helicoidal.*

La potencia del engranaje será por tanto el par de torsión multiplicado por la velocidad angular:

$$\text{Potencia} = \text{Par} \cdot \omega \qquad \textbf{(6.29)}$$

Así,

$$\tan \varphi_n = \frac{Fs \cos \psi}{Ft}$$

y

$$\tan \varphi = \frac{\tan \varphi n}{\cos \psi} \qquad \textbf{(6.30)}$$

También es interesante considerar el efecto del ángulo de hélice en el número de dientes que se pueden cortar con una fresa en un engrane helicoidal sin que se presente rebaje. Haciendo referencia a la figura 6.37 (engranes rectos), se puede desarrollar una ecuación para el número mínimo de dientes en engranes helicoidales cortados con una fresa como se hizo para los engranes rectos en el punto 6.5.7 (Ver ecuación 6.15). Esto resulta en:

$$N = \frac{2k\ cos\psi}{sen^2\varphi} \qquad \textbf{(6.31)}$$

La AGMA compiló una tabla (207.05) que da el número mínimo de dientes que se pueden fresar en un engrane helicoidal sin que se presente rebaje. Estos valores aparecen en la tabla 6.10 en función del ángulo de hélice ψ y el ángulo de presión φ_n para dientes de profundidad total.

	ϕn		
ψ	**14½º**	**20º**	**25º**
0º engranajes rectos	32	18	12
5º	32	17	12
10º	31	17	11
15º	29	16	11
20º	27	15	10
23º	26	14	10
25º	25	14	9
30º	22	12	8
35º	19	10	7
40º	15	9	6
45º	12	7	5

Tabla 6.10. *Número mínimo de dientes para engranajes helicoidales sin que se presente socavación o rebaje*

Aunque la mayoría de las fresas están diseñadas para tener un valor estándar de paso diametral en el plano normal, algunas fresas se producen para tener un valor estándar de paso diametral en el plano de rotación. Estas fresas se conocen como fresas transversales y el paso en el plano de rotación se conoce como *paso diametral trasversal*.

Si el engrane se va a cortar mediante el método de Fellows para formado de engranajes, las dimensiones se consideran en el plano de rotación, y el paso diametral y el ángulo de presión son valores estándar en dicho plano. Cuando un engrane helicoidal se corta con un cortador Fellows, el paso circular *p* de la figura 6.44 se vuelve igual al paso circular del cortador de manera que se pueden aplicar las siguientes relaciones:

$$p = \frac{\pi D}{N} = \frac{\pi}{Pd} \qquad \text{(FPS)} \qquad \textbf{(6.32)}$$

$$p = \pi m \qquad \text{(SI)}$$

y

$$Pd = \frac{N}{D} \qquad \text{(FPS)} \qquad \textbf{(6.33)}$$

$$m = \frac{D}{N} \qquad \text{(SI)}$$

En el método Fellows no se puede emplear el mismo cortador para cortar tanto engranes helicoidales como rectos.

Las características presentadas se aplican a engranes helicoidales con flechas paralelas y con flechas cruzadas. A continuación se estudiará los engranajes helicoidales paralelos.

La tabla 6.11 muestra los símbolos para los engranajes helicoidales según la AGMA y la propuesta ISO 701 de la norma internacional. Los símbolos que son iguales a los engranajes rectos tabla 6.8 no se incluyen.

	AGMA	**ISO 701**
Paso circular (plano de rotación)	p	p
Paso circular (plano normal)	p_n	p_n
Ángulo de presión (plano de rotación)	ϕ	α
Ángulo de presión (plano normal)	ϕ_n	α_n
Ángulo de hélice	ψ	β
Ángulo entre flechas	Σ	Σ

Tabla 6.11. *Símbolos de los engranajes helicoidales.*

6.6.11. Engranajes helicoidales paralelos

Para que los engranajes helicoidales paralelos se acoplen adecuadamente se deben satisfacer las siguientes condiciones:

1.- Ángulos de hélice iguales
2.- Módulos iguales
3.- Sentido opuesto, es decir, un engrane con hélice a la izquierda y el otro con hélice a la derecha.

De la ecuación 6.28, la relación de velocidades se puede expresar como:

$$\frac{\omega 1}{\omega 2} = \frac{N2}{N1} = \frac{PdD2cos\psi 2}{PdD1cos\psi 1} = \frac{D2}{D1} \qquad \textbf{(6.34)}$$

La ecuación de los engranes rectos para la distancia entre centros,

$$C = \frac{N1+N2}{2Pd} \qquad (FPS)$$

$$C = \frac{(N1+N2)}{2}\, m \qquad (SI)$$

También se puede emplear para los engranajes para los engranajes helicoidales paralelos con la condición de que Pd sea el paso diametral en el plano de rotación.

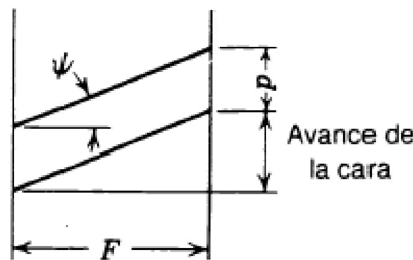


Figura 6.47. *Avance de la cara.*

En un engrane helicoidal paralelo, el ancho de la cara se hace suficientemente grande para de manera que, para un ángulo de hélice ψ dado, el avance de la cara sea mayor que el paso circular, como se ilustra en la figura 6.47. Esto producirá un contacto continuo en el plano axial conforme giran los engranajes. Esta relación (avance de la cara con respecto al paso circular) se puede considerar como una relación de contacto. De la figura 6.47 se puede ver que para que el avance de la cara sea exactamente igual al paso circular, el ancho de la cara tendrá que ser igual a *p/tanψ.* Para tener un margen de seguridad, la AGMA recomienda que este ancho límite de la cara se incremente un 15% por lo menos, lo cual da por resultado la siguiente ecuación:

$$F > \frac{1.15p}{\tan\psi} \qquad \textbf{(6.35)}$$

Los engranajes helicoidales que conectan flechas paralelas tienen contacto lineal similar al de los engranajes rectos. Sin embargo, en los engranajes rectos el contacto lineal es paralelo al eje, en tanto que en los engranajes helicoidales corre diagonalmente a través de la cara del diente. Los engranajes helicoidales paralelos tienen una acción más suave y por lo tanto menos ruido y vibración que los engranajes rectos, por lo que se prefieren par trabajos de alta velocidad. La razón por la que su acción es más suave es que los dientes entran en contacto gradualmente, comenzando en un extremo del diente, avanzando a través de la superficie del diente, en tanto que los engranajes rectos el

contacto tiene lugar simultáneamente en todo el ancho de la cara. La desventaja de los engranajes helicoidales paralelos está en el empuje terminal producido por la hélice del diente. Si este empuje terminal es tan grande que los cojinetes no lo pueden soportar convenientemente, se pueden balancear usando dos engranajes helicoidales de sentido opuesto o usando un engranaje de espina de pescado que es en efecto un engranaje helicoidal doble cortado en un disco. La figura 6.48 muestra una fotografía de un engranaje helicoidal doble.



Figura 6.48. *Engranaje helicoidal doble*

6.7. CALCULO DE ENGRANAJES

6.7.1. Consideraciones dinámicas

La dirección de la fuerza transmitida es según la línea de acción que es tangente a las circunferencias base.

En la figura 6.49 se consideran:

- las fuerzas sobre el diente, Fd.
- las fuerzas sobre el eje, Fe.
- el par transmitido, T.

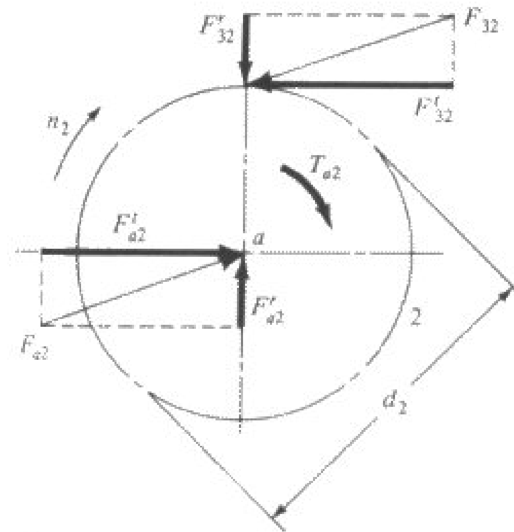


Figura 6.49. *La fuerza transmitida tiene la dirección de la línea de contacto.*

$$Pot = T.\omega \qquad \textbf{(6.36)}$$

$$T=F\cdot R \qquad \textbf{(6.37)}$$

Si P y ω son constantes, también lo será T y por tanto también F. Lo que si varía es el punto de contacto, y por tanto el efecto de esta fuerza sobre el diente será diferente según esté situada por ejemplo en el extremo de la cara o en el flanco.

6.7.2. Esfuerzos en los dientes

La capacidad de transmisión de un engranaje viene limitada por:

- el calor generado.
- el fallo de los dientes por ruptura.
- el fallo por fatiga en la superficie de los dientes.
- el ruido resultante de velocidades altas o cargas fuertes.

A continuación se estudiarán los fallos de engranajes: por esfuerzo estático a flexión, por fatiga a flexión, por fatiga superficial.

6.7.2.1. Cálculo estático a rotura.

Si b es el ancho del diente, la tensión en el punto "a" (sin tener en cuenta la compresión) es:

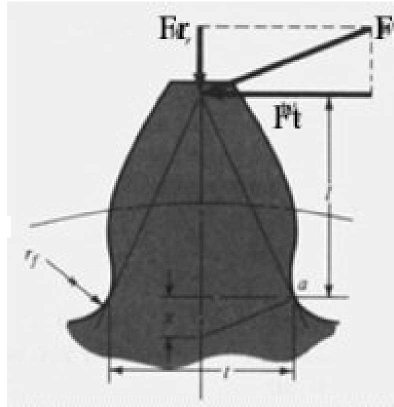


Figura 6.50. *Diente sometido a flexión.*

$$\sigma = \frac{6 \cdot F_t . \ell}{bt^2} = \frac{F_t}{b} . \frac{6\ell}{t^2}$$

(6.37)

Nótese que manteniendo F_t y b constantes, las curvas de isotensión debido a la flexión son parábolas. La sección más crítica será aquella en la que una de las parábolas sea tangente al flanco del diente.

El factor $\frac{6 \cdot l}{t^2}$ en la ecuación (6.37) es una relación puramente geométrica y se puede sustituir en función del módulo y de un factor conocido por el factor de Lewis que depende exclusivamente de la norma de dentado y del número de dientes. La siguiente ecuación es conocida como la ecuación de Lewis:

$$\sigma = \frac{F_t}{b} \frac{6\ell}{t^2} = \frac{F_t}{b.m} \frac{1}{Y} \rightarrow \text{Y, factor de Lewis}$$

La expresión anterior no considera el efecto de la fuerza F_r, además supone que el diente no comparte carga y que la fuerza máxima se ejerce en el extremo del diente. Si el diseño es correcto normalmente la relación de contacto será mayor que 1 y entonces cuando en un diente la carga se aplique en el extremo de éste habrá otros que estén en contacto.

De lo dicho anteriormente se deriva que, probablemente, el punto más desfavorable será alguno intermedio donde sólo un diente esté en contacto.

Otro aspecto que no tiene en cuenta la ecuación de Lewis es la concentración de tensiones en el pie del diente. Para la determinación del factor de concentración se utilizan los datos geométricos y constructivos del diente (Kf).

La AGMA (American Gear Manufacturers Association) estableció una ecuación de Lewis modificada en la que se contempla el factor Kf, y el hecho de que la carga (debido a la relación de contacto) cuando sólo un diente está en contacto no se aplica en la punta del diente. Se introduce un nuevo factor, J, factor AGMA:

$$\sigma = \frac{F_t}{bmJ} \tag{6.38}$$

J (lo mismo que Y) se determina por tablas a partir de adendo, dedendo, rf (radio de acuerdo) y z (número de dientes).

6.7.2.2. Efectos dinámicos.

Los fenómenos dinámicos intervienen puesto que se está transmitiendo una carga y hay movimiento. Se vio, por experimentación, que el parámetro que podía ayudar a tener en cuenta los efectos dinámicos era la velocidad en la circunferencia de paso, v (v=ω.r, donde ω=velocidad rotación y r=radio de paso).

Se utiliza un factor Kv que afecta a la ecuación (6.38). Kv = 1 cuando los efectos dinámicos no se tienen en cuenta y las siguientes relaciones proporcionan Kv en función de v:

- Engranajes rectos, dientes acabados por sinfín o por alisado:

$$K_v = \frac{50}{50+\sqrt{v}} \tag{6.39}$$

v en pies/minuto

(1 pie = 12 pulgadas; 1 pulgada = 25,4 mm)

- Engranajes con dientes de alta precisión alisados o esmerilados. Carga dinámica apreciable:

$$K_v = \sqrt{\frac{78}{78+\sqrt{v}}} \quad \textbf{(6.40)}$$

v en pies/minuto

Resumiendo se llegaría a dos expresiones para la tensión por flexión.

- Ecuación de Lewis para esfuerzo por flexión

$$\sigma = \frac{F_t}{bmY.K_v} \quad \textbf{(6.41)}$$

- Ecuación AGMA para esfuerzos por flexión

$$\sigma = \frac{F_t}{b.m.J.K_v} \quad \textbf{(6.42)}$$

Si además queremos considerar el efecto de la hélice en los dientes de los engranajes helicoidales, multiplicaremos las dos expresiones anteriores por un factor Y_β que depende directamente del ángulo de hélice, β, recogido en la siguiente tabla:

Ángulo de hélice (β)	**Y_β**
0	1.00
5	0.93
10	0.87
15	0.82
20	0.78
23	0.76
≥25	0.75

Tabla 6.12. *Coeficiente Y_β*

6.7.3. Durabilidad de la superficie fatiga

En este apartado se tiene en cuenta la fatiga debida a las tensiones de contacto. Por un lado habrá que determinar las tensiones de contacto que se generan en el engrane, σH, y la resistencia a la fatiga superficial del material empleado, SH, por otro.

6.7.3.1. Tensiones de contacto.

Hay que recurrir a las expresiones de contacto entre dos cilindros cuyos radios de curvatura son conocidos, y también lo es la carga aplicada. Se particulariza para engranajes:

$$\sigma_H = -C_p \sqrt{\frac{F_t}{C_v . b . d . I}} \qquad \textbf{(6.43)}$$

donde,

Cv = Kv (factor dinámico visto anteriormente).
b = ancho del diente.
d = diámetro primitivo.

$$I = \frac{\cos\phi sen\phi}{2}\frac{m_G}{m_G+1} \qquad \frac{m_G}{m_G-1} \text{para engranes interiores}$$

$$m_G = \frac{d_G}{d_P} \qquad (d_G\text{, diámetro engrane, } d_P\text{, diámetro piñón})$$

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi\left(\frac{1-\nu_p^2}{E_p}+\frac{1-\nu_G^2}{E_G}\right)}}$$

6.7.3.2. Resistencia a la fatiga en la superficie.

La AGMA recomienda que se use la siguiente expresión para el límite de fatiga:

$$S_H = \frac{CL*CR}{CT*CH} \cdot Sc \qquad \textbf{(6.44)}$$

donde,

Sc = 0,4·HB-10 kpsi
HB = dureza Brinell de la superficie más suave que está en contacto.
C_L = factor duración de vida.
C_R = factor confiabilidad.
C_H = factor de relación de dureza.= 1 para engranajes rectos
C_T = factor de temperatura = 1 si TF < 120ºC

Ciclos de vida	Factor de vida C_L	Confiabilidad R	Factor de conf. C_R
10^4	1.5	Hasta 0.99	0.80
10^5	1.3	0.99 a 0.999	1.00
10^6	1.1	0.999 o más	1.25 o más
10^8 o más	1.0		

Tabla 6.13. *Factores de modificación de vida y confiabilidad.*

6.7.4. Resistencia a fatiga.

Aproximación clásica

- Intenta determinar la resistencia a fatiga o el número total de ciclos que soportará un sistema hasta el fallo, ante determinadas solicitaciones.

Curva S-N: relación entre amplitudes de las tensiones producidas y número de ciclos al que se produce el fallo.

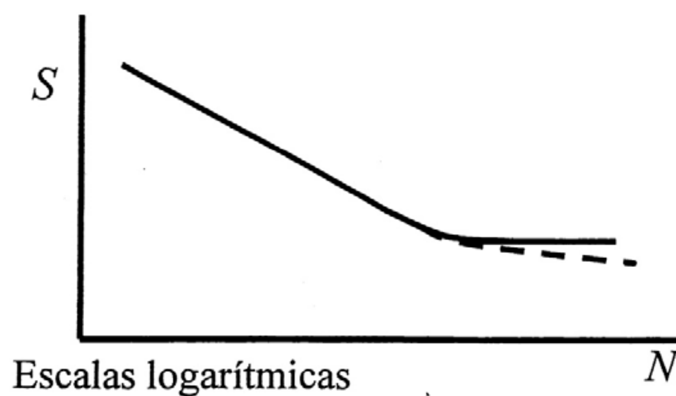


Figura 6.51. *Curva S-N*

- Extrapola los resultados experimentales a situaciones reales más complejas.
- La más empleada actualmente en diseño mecánico.

6.7.4.1. Curvas S-N. Límite de fatiga.

Obtención de la curva: mediante una serie de ensayos de fatiga.

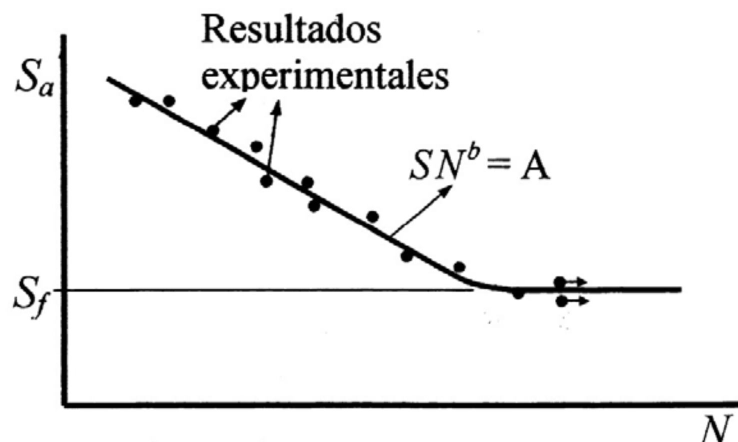


Figura 6.52. *Límite de fatiga.*

- Los ensayos para definir la resistencia de un material se realizan normalmente sobre probetas pulidas y de pequeñas dimensiones.
- El valor característico de la tensión, S, en la curva es la amplitud en el punto de mayor variación.
- Se ajusta una curva del tipo $SN^b=A$ a los resultados experimentales.
- Existen diversas normas de definen la forma de realización de los ensayos y obtención de la curva (ASTM E 466 y 468).
- También pueden obtenerse curvas S-N con probetas de diferentes geometrías y acabados superficiales. Permiten conocer la influencia de diferentes parámetros.
- Igualmente, pueden obtenerse curvas S-N para ensayos con distintos valores de la tensión media.

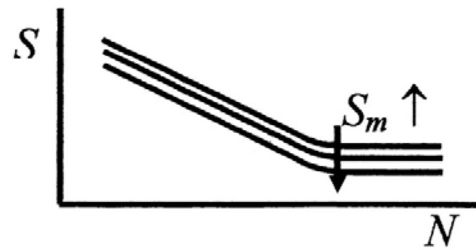


Figura 6.53. *Influencia S_m*

➢ Características de la curva. Límite de fatiga

- En escala logarítmica, la curva correspondiente a una recta.
- Normalmente, la curva SN^b=A representa adecuadamente la relación S-N para N>10^3 o 10^4 ciclos.
- Para N<10^3 ciclos, los valores experimentales se alejan de la recta en escala logarítmica.
- Para N<10^3 ciclos suelen producirse deformaciones plásticas apreciables en el material en cada ciclo de carga.
- Normalmente, la curva S-N suele emplearse para vidas iguales o superiores a 10^3 o 10^4 ciclos.
- En determinados metales, la curva S-N presenta un codo entre 10^6 y 10^7 ciclos, haciéndose prácticamente horizontal.
- Entre estos metales se incluyen los aceros de resistencia media y baja, la fundición, las aleaciones de aluminio-magnesio y algunas aleaciones de titanio.
- El valor de la tensión correspondiente a la horizontal representa un nivel, por debajo del cual el material puede soportar un número indefinido de ciclos.
- El valor de la amplitud de la tensión por debajo de la cual el material soporta un número indefinido de ciclos se denomina límite de fatiga.

Límite de fatiga: nivel de tensiones por debajo del cual no se inician las grietas o, si se inician no progresan, con lo que no se produce el fallo final.

- Otros muchos metales, aunque no presentan límite de fatiga claramente definido, sí presentan una reducción de la pendiente de la curva de fatiga a partir de un número de ciclos entre 10^6 y 10^8 ciclos.

- Aspectos estadísticos

  - Varios ensayos con idénticas cargas producen vidas diferentes.
  - La distribución de vida obtenida es aproximadamente logarítmica-normal.
  - La dispersión disminuye a medida que se reduce el valor medio de N.
  - La desviación típica del límite de fatiga en los metales suele estar comprendida entre el 5 y el 10% de valor medio. Un valor generalmente aceptado como buena estimación, si no se tienen otros datos, es el 8%.
  - La figura adjunta muestra un ejemplo de distribución de vidas para diferentes valores de tensiones nominales.

- Relación entre la resistencia a la rotura y a fatiga

  - Los datos existentes sobre la resistencia a fatiga de los metales son escasos.
  - Los ensayos a fatiga requieren mucho tiempo para su realización.
  - Se ha comprobado que en muchos metales existe una relación bastante estrecha entre la resistencia a tracción y a fatiga.
  - En aceros de resistencia media y baja y aleaciones de aluminio, el límite de fatiga está comprendido entre 0.35 y 0.5 veces el límite de rotura.
  - Para resistencias a la rotura superiores a 1100 MPa, el límite de fatiga suele estar comprendido entre 500 y 600 MPa, sin que el aumento de la resistencia suponga un incremento del límite de fatiga.
  - En las aleaciones de aluminio más resistentes a rotura, la resistencia a fatiga para $5x10^8$ ciclos se mantiene próxima a 140 MPa.
  - En otros metales se producen relaciones similares entre la resistencia a tracción y a fatiga.
  - A bajo número de ciclos, la resistencia a fatiga crece hasta aproximarse a la resistencia a la rotura para un número de ciclos inferior a 1000.
  - En la mayoría de los metales, normalmente, la resistencia a fatiga para 10^3 ciclos puede estimarse en el 90% de la resistencia a la rotura.

- Estimación de la curva S-N

  - Las relaciones anteriores entre la resistencia a rotura y a fatiga no son exactas y varían de unos metales a otros.
  - No obstante, si no se dispone de otros resultados de ensayos de fatiga, para su aplicación en diseños preliminares, la curva S-N puede aproximarse a partir de los datos anteriores.

- La estimación puede realzarse ajustando una recta de expresión $SN^b=A$ entre 10^3 y el número de ciclos para el que esté definido el límite de fatiga ($10^6 - 10^8$ ciclos)
- Para 10^3 ciclos puede considerarse un valor $S_a= 0.9\ S_u$.
- Entre 10^6 y 10^8, dependiendo del material, puede suponerse en valor de S_f de acuerdo con las consideraciones anteriores.
- En cualquier caso, si se conocen más datos sobre la resistencia a fatiga del metal de que se trate, deben emplearse para estimar la curva.
- Cualquier diseño previo realizado con estas aproximaciones debe ser contrastado posteriormente, en lo posible, con ensayos sobre el elemento construido.

6.7.4.2. Diseño a fatiga a vida infinita.

Con amplitud constante, las tensiones tienen que ser inferiores al límite de fatiga.

S_a = tensión nominal alterna aplicada
S_m = tensión nominal media aplicada.

$$S_f \approx 0.5\ S_u\ k_{load} \tag{6.45}$$

k_{load} = 0.58 (torsión)
= 0.9 (tracción)
= 1 (flexión)

Condición de diseño: el punto de trabajo dentro del área segura.

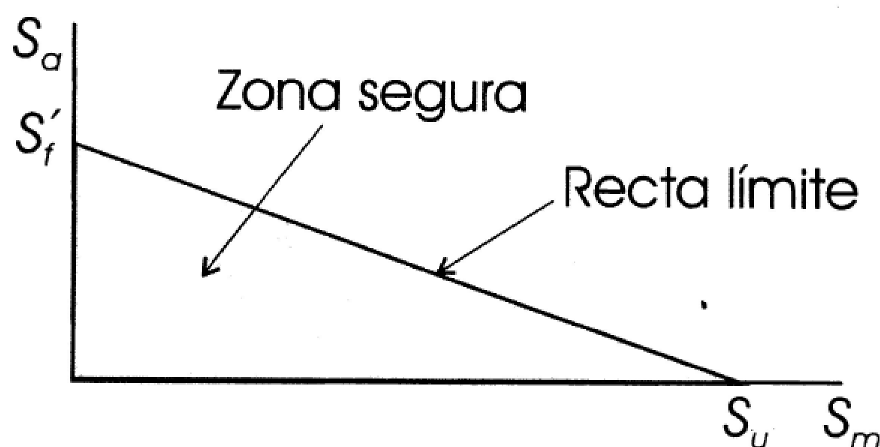


Figura 6.54. *Zona segura*

Las tensiones alterna y media de los puntos de la recta límite cumplen la condición:

$$\frac{S_a}{S'_f} + \frac{S_m}{S_u} = 1 \tag{6.46}$$

Cualquier punto interior de la zona segura cumplirá la condición:

$$\frac{S_a}{S'_f} + \frac{S_m}{S_u} < 1$$

El coeficiente de seguridad, n, ante un estado de carga, A, que se produzca tensiones S_{Aa} y S_{am}, puede expresarse:

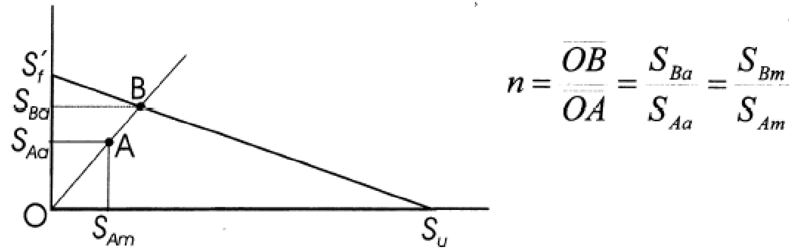


Figura 6.55. *Coeficiente de seguridad*

De la expresión que satisface el punto B de la recta límite

$$\frac{S_{Ba}}{S'_f} + \frac{S_{Bm}}{S_u} = 1$$

se obtiene

$$\frac{S_{Ba}}{S_{Aa}}\left(\frac{S_a}{S'_f} + \frac{S_m}{S_u}\right) = n\left(\frac{S_a}{S'_f} + \frac{S_m}{S_u}\right) = 1$$

Por tanto:

$$n = \frac{1}{\left(\frac{S_a}{S'_f} + \frac{S_m}{S_u}\right)} \tag{6.47}$$

En el caso de los engranajes se utiliza para el cálculo del límite a fatiga, Sf, la siguiente expresión:

$$S_f = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot S_f' \qquad \textbf{(6.48)}$$

donde,

S_f'= límite de fatiga del material.
k_a = factor de superficie.
k_b = factor de tamaño.
k_c = factor de confiabilidad.
k_d = factor de temperatura.
k_e = factor de modificación por concentración de esfuerzo.

6.7.4.3. Factor de superficie, k_a

Se usa la curva de "acabado a máquina" aun cuando el flanco pueda estar esmerilado o cepillado, porque el fondo no lo suele estar.

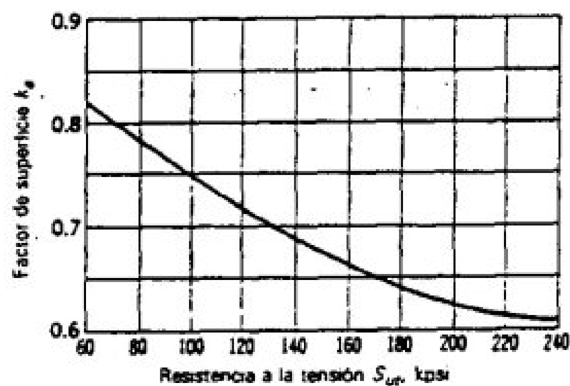


Tabla 6.14. *Factores de acabado en superficie k_a para dientes de engrane cortados, cepillados y esmerilados.*

6.7.4.4. Factor de tamaño k_b

Este factor tiene en cuenta que S ha sido calculado para un tamaño d, de probeta y que el diente tiene otra sección transversal. Utilizando P (paso diametral= 1/m) en dientes/pulgada si:

- P>12 dientes/pulgada k_b=1
- P<12 utilizar Tabla 4.2.

Paso P	Factor k_b	Paso P	Factor k_b
2	0.832	6	0.925
2,5	0.850	7	0.939
3	0.865	8	0.951
4	0.890	10	0.972
5	0.909	12	0.990

Tabla 6.15. *Factores de tamaño para dientes de engrane.*

6.7.4.5. Factor de confiabilidad, k_c.

Confiabilidad R	0.50	0.90	0.95	0.99	0.999	0.9999
Factor k_c	1.000	0.897	0.868	0.814	0.753	0.702

Tabla 6.16. *Factores de confiabilidad*

Una confiabilidad de R=0,9 indica que hay una probabilidad de 90% que el componente soporte las cargas previstas.

6.7.4.6. Factor de temperatura, k_d

De una forma muy aproximada puede utilizarse:

- $k_d = 1$ T≤450ºC
- $k_d = 1-5{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot (T-450)$ 450ºC<T<550ºC

6.7.4.7. Concentración del esfuerzo, k_e

Este factor ha sido incluido en el coeficiente J de la AGMA y por tanto tómese para engranes, k_e = 1.

6.8. CONCLUSIONES

Los engranajes transmiten el movimiento entre distintos tipos de ejes, concretamente los cilíndricos transmiten el movimiento de ejes paralelos. Esta transmisión de movimiento se realiza a través de dientes cuyo perfil tiene la forma de una involuta de circunferencia, esta curva hace que sean más fáciles de fabricar y que el punto de contacto esté siempre en la línea de acción de los dos engranajes al separarlos unos de otros, optimizando el movimiento.

Podemos encontrarnos con engranajes de dientes rectos o helicoidales, estos últimos son más silenciosos y pueden soportar una carga mayor que los rectos, por el contrario soportan una carga axial que debe soportar el cojinete o rodamiento que soporta el eje que los giran. Existen los engranajes dobles helicoidales que eliminan este esfuerzo axial debido a la forma del diente.

La geometría de los engranajes está definida por tres parámetros fundamentales relacionados entre sí:

- Número dientes
- Módulo
- Diámetro primitivo

De manera que si conocemos dos de ellos es posible determinar el tercero. Todos los demás parámetros del engranaje dependen de estos tres. Esta dependencia queda recogida en la norma UNE 18 066 que usaremos en la aplicación.

Dejando atrás la geometría y entrando en los esfuerzos que debe soportar el engranaje, éste está sometido a:

- Rotura estática y dinámica del diente por la carga que se le aplica
- Durabilidad de la superficie de contacto por el rozamiento entre los flancos de las caras de los dientes.
- Fatiga del diente por la continua carga y descarga del diente en su movimiento giratorio.

Conocida la geometría del engranaje, el cálculo de estas tres solicitaciones influirá en la anchura del diente y, por supuesto, del propio engranaje.